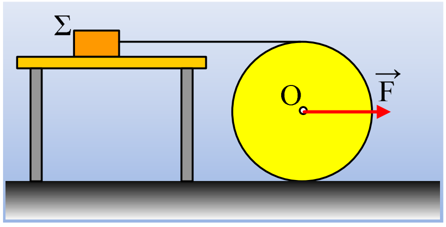
Μέχρι να πέσει το σώμα…



Γύρω από έναν κύλινδρο μάζας M=20kg και ακτίνας R=0,5m είναι τυλιγμένο ένα νήμα, στο άκρο του οποίου έχει δεθεί ένα σώμα Σ μάζας 1kg το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο. Το σώμα Σ είναι τοποθετημένο σε **ακλόνητο** τραπέζι, ενώ ο κύλινδρος στο λείο έδαφος, με τέτοιο τρόπο ώστε το νήμα που συνδέει τα δυο σώματα να είναι οριζόντιο και τεντωμένο. Το σώμα Σ απέχει κατά d=1m από το άκρο του τραπεζιού, ενώ παρουσιάζει συντελεστή τριβή μ=0,09 με την επιφάνεια του τραπεζιού. Σε μια στιγμή t_0=0 ασκούμε στο κέντρο του κυλίνδρου οριζόντια σταθερή δύναμη F=5N. Να υπολογιστούν:

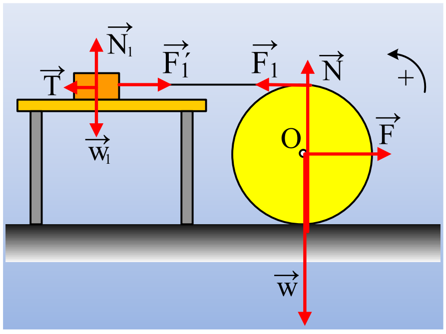
i) Η επιτάχυνση του σώματος Σ και η επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου.

ii) Το έργο της δύναμης F, μέχρι τη στιγμή που το σώμα Σ εγκαταλείπει το τραπέζι.

iii) Την κινητική ενέργεια κάθε σώματος την παραπάνω στιγμή.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του I= ½ MR^2 και g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα δύο σώματα, όπου επειδή το νήμα είναι αβαρές, ασκεί στα άκρα του δυνάμεις ίσου μέτρου $F_1=F_1'$.

Για το σώμα Σ:

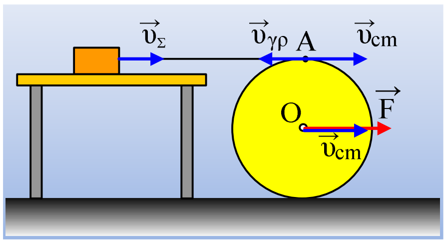
$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N_1=mg=10N, \text{ αλλά τότε } T=\mu N_1=0{,}9N$$

$$\text{Ενώ } \Sigma F_x= m\alpha \rightarrow F_1'-T=m\alpha \ (1)$$

Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση, η οποία αποτελείται από μια μεταφορική και μια περιστροφική με φορά αντίθετη από την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Εφαρμόζοντας τον 2^o νόμο του Νεύτωνα για τις επιμέρους αυτές κινήσεις παίρνουμε:

$$\Sigma F=M\alpha_{cm} \rightarrow F-F_1=M\alpha_{cm} \ (2) \text{ και}$$

$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F_1\cdot R= ½ MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F_1= ½ MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \ (3)$$



Αλλά το σημείο Α του νήματος που έρχεται σε επαφή με το ανώτερο σημείο του κυλίνδρου, σαν σημείο της περιφέρειας του κυλίνδρου, έχει μια ταχύτητα προς τα δεξιά υ_{cm} λόγω της μεταφορικής κίνησης του κυλίνδρου και μια $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R$ εξαιτίας της κυκλικής κίνησης γύρω από το Ο. Συνεπώς $\upsilon_A=\upsilon_{cm}-\omega\cdot R=\upsilon_\Sigma$, αφού όλα τα σημεία του νήματος έχουν την ίδια ταχύτητα. Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\frac{d\upsilon_\Sigma}{dt}=\frac{d\upsilon_{cm}}{dt}-\frac{d(\omega R)}{dt} \rightarrow \alpha=\alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$$

Από (2) και (3) παίρνουμε:

$$F\text{-}3F_1=M(\alpha_{cm}\text{-}\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R) \rightarrow \quad F\text{-}3F_1=M\alpha \ (4)$$

Από (1) και (4) τελικά βρίσκουμε: F-3mα-3T=Mα →

$$a=\frac{F-3T}{M+3m}=\frac{5-3\cdot 0{,}9}{20+3\cdot 1}m/s^2=0{,}1m/s^2$$

Και από την σχέση (2) $a_{cm}=\dfrac{F-F_1}{M}=\dfrac{F-T-ma}{M}=\dfrac{5-0{,}9-1\cdot 0{,}1}{20}m/s^2=0{,}2m/s^2$

ii) Το σώμα Σ κινείται με σταθερή επιτάχυνση, εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση για την οποία $\Delta x= ½\ \alpha\cdot t^2$ (α). Εξάλλου και ο κύλινδρος εκτελεί μεταφορική κίνηση με σταθερή επιτάχυνση κέντρου μάζας, οπότε $x_{cm}= ½\ \alpha_{cm}\cdot t^2$ (β). Με διαίρεση των (β) και (α) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{x_{cm}}{\Delta x}=\frac{a_{cm}}{a}\rightarrow x_{cm}=\Delta x\cdot\frac{a_{cm}}{a}=1m\cdot\frac{0{,}2}{0{,}1}=2m$$

Έτσι το έργο της δύναμης F είναι: $W=F\cdot x_{cm}=5\cdot 2J=10J$.

iii) Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ είναι:

$$K_\Sigma=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}ma^2t^2=ma\cdot\frac{1}{2}at^2=ma\cdot d=1\cdot 0{,}1\cdot 1J=0{,}1J$$

Ενώ του κυλίνδρου:

$$K_k=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \quad (5)$$

Αλλά $K_\mu=\dfrac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2=\dfrac{1}{2}Ma_{cm}^2t^2=Ma\dfrac{1}{2}at^2=Ma\cdot x_{cm}$

Ενώ $K_\pi=\dfrac{1}{2}I\omega^2=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}MR^2a_{\gamma\omega\nu}^2t^2=\left(\dfrac{1}{2}MR^2\right)\cdot a_{\gamma\omega\nu}\cdot\dfrac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu}t^2=\tau\cdot\theta=F_1\cdot R\theta$ (6)

Αλλά $F_1=F-M\alpha_{cm}=5N-20\cdot 0{,}2N=1N$, ενώ το γινόμενο Rθ μετράει το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται, το οποίο είναι ίσο με $\Delta\ell=x_{cm}-d=1m$, οπότε η (5) γίνεται:

$$K_k=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2=Ma\cdot x_{cm}+F_1R\theta=20\cdot 0{,}2\cdot 2J+1\cdot 1J=9J$$

Σχόλιο:

Στον κύλινδρο ασκούνται δυο δυνάμεις που παράγουν έργο, η F, το έργο της οποίας είναι 10J και η τάση του νήματος F_1. Πόσο είναι το έργο της;

$W_{F1}=F_1\cdot\Delta x_A\cdot$συνα, όπου $\Delta x_A= ½\ \alpha_A t^2= ½\ \alpha\cdot t^2=d$ ενώ α=180°, οπότε:

$$W_{F1}=F_1\cdot\Delta x_A\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=1\cdot 1\cdot(-1) = -1J.$$

Συνεπώς η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου είναι 10J-1J=9J.

Τι εκφράζει το παραπάνω έργο της δύναμης F_1; Την ενέργεια που αφαιρείται από τον κύλινδρο, μέσω του νήματος και η οποία μεταφέρεται στο σώμα Σ. Τι θα απογίνει; Ένα μέρος της θα μετατραπεί σε θερμική εξαιτίας της τριβής $Q_θ=|T\cdot d|=0,9\cdot 1J=0,9J$ και το υπόλοιπο (0,1J) είναι η κινητική του ενέργεια.

Ας δούμε και μια άλλη πλευρά για το έργο της δύναμης F_1.

Θα μπορούσαμε να βρούμε το έργο της για τη μεταφορική κίνηση $W_μ=-F_1\cdot x_{cm}=-2J$, ενώ το έργο της για την περιστροφική κίνηση, ίσο με το έργο της ροπής $W_τ=τ\cdot θ=+1J$. Τι μετράνε τα παραπάνω έργα;

Η δύναμη F_1 αφαιρεί ενέργεια 2J από την μεταφορική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου, από τα οποία το 1J μετατρέπεται σε περιστροφική κινητική ενέργεια, μέσω του έργου της ροπής, ενώ το άλλο 1J μεταφέρεται στο σώμα Σ.

Να τονισθεί ότι η εξίσωση (6) μας λέει ότι η περιστροφική κινητική ενέργεια είναι ίση με το έργο της ασκούμενης ροπής.

dmargaris@sch.gr