# Μέχρι να πέσει το σώμα…

 Γύρω από έναν κύλινδρο μάζας Μ=20kg και ακτίνας R=0,5m είναι τυλιγμένο ένα νήμα, στο άκρο του οποίου έχει δεθεί ένα σώμα Σ μάζας 1kg το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο. Το σώμα Σ είναι τοποθετημένο σε **ακλόνητο** τραπέζι, ενώ ο κύλινδρος στο λείο έδαφος, με τέτοιο τρόπο ώστε το νήμα που συνδέει τα δυο σώματα να είναι οριζόντιο και τεντωμένο. Το σώμα Σ απέχει κατά d=1m από το άκρο του τραπεζιού, ενώ παρουσιάζει συντελεστή τριβή μ=0,09 με την επιφάνεια του τραπεζιού. Σε μια στιγμή t0=0 ασκούμε στο κέντρο του κυλίνδρου οριζόντια σταθερή δύναμη F=5Ν. Να υπολογιστούν:

i) Η επιτάχυνση του σώματος Σ και η επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου.

ii) Το έργο της δύναμης F, μέχρι τη στιγμή που το σώμα Σ εγκαταλείπει το τραπέζι.

iii) Την κινητική ενέργεια κάθε σώματος την παραπάνω στιγμή.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του Ι= ½ ΜR2 και g=10m/s2.

**Απάντηση:**

* 1.  Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα δύο σώματα, όπου επειδή το νήμα είναι αβαρές, ασκεί στα άκρα του δυνάμεις ίσου μέτρου F1=F1΄.

Για το σώμα Σ:

ΣFy=0 → Ν1=mg=10Ν, αλλά τότε Τ=μΝ1=0,9Ν

Ενώ ΣFx= mα → F1΄-Τ=mα (1)

Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση, η οποία αποτελείται από μια μεταφορική και μια περιστροφική με φορά αντίθετη από την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Εφαρμόζοντας τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για τις επιμέρους αυτές κινήσεις παίρνουμε:

ΣF=Μαcm → F-F1=Mαcm (2) και

Στ=Ι·αγων → F1·R= ½ ΜR2·αγων→ F1= ½ ΜR·αγων (3)

 Αλλά το σημείο Α του νήματος που έρχεται σε επαφή με το ανώτερο σημείο του κυλίνδρου, σαν σημείο της περιφέρειας του κυλίνδρου, έχει μια ταχύτητα προς τα δεξιά υcm λόγω της μεταφορικής κίνησης του κυλίνδρου και μια υγρ=ω·R εξαιτίας της κυκλικής κίνησης γύρω από το Ο. Συνεπώς υΑ=υcm-ω·R=υΣ, αφού όλα τα σημεία του νήματος έχουν την ίδια ταχύτητα. Παραγωγίζοντας έχουμε:

→ *α=αcm-αγων·R*

Από (2) και (3) παίρνουμε:

*F-3F1=M(αcm-αγων·R) → F-3F1=Mα (4)*

Από (1) και (4) τελικά βρίσκουμε: F-3mα-3Τ=Μα →



Και από την σχέση (2) 

* 1. Το σώμα Σ κινείται με σταθερή επιτάχυνση, εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση για την οποία Δx= ½ α·t2 (α). Εξάλλου και ο κύλινδρος εκτελεί μεταφορική κίνηση με σταθερή επιτάχυνση κέντρου μάζας, οπότε xcm= ½ αcm·t2 (β). Με διαίρεση των (β) και (α) κατά μέλη παίρνουμε:



Έτσι το έργο της δύναμης F είναι: W=F·xcm=5·2J=10J.

* 1. Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ είναι:



Ενώ του κυλίνδρου:

 (5)

Αλλά 

Ενώ  (6)

Αλλά F1=F-Μαcm=5Ν-20·0,2Ν=1Ν, ενώ το γινόμενο Rθ μετράει το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται, το οποίο είναι ίσο με Δℓ=xcm-d=1m, οπότε η (5) γίνεται:



**Σχόλιο:**

Στον κύλινδρο ασκούνται δυο δυνάμεις που παράγουν έργο, η F, το έργο της οποίας είναι 10J και η τάση του νήματος F1. Πόσο είναι το έργο της;

WF1=F1·ΔxΑ·συνα, όπου ΔxΑ= ½ αΑt2= ½ α·t2=d ενώ α=180°, οπότε:

WF1=F1·ΔxΑ·συνα=1·1·(-1) = -1J.

Συνεπώς η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου είναι 10J-1J=9J.

Τι εκφράζει το παραπάνω έργο της δύναμης F1; Την ενέργεια που αφαιρείται από τον κύλινδρο, μέσω του νήματος και η οποία μεταφέρεται στο σώμα Σ. Τι θα απογίνει; Ένα μέρος της θα μετατραπεί σε θερμική εξαιτίας της τριβής Qθ=|Τ·d|=0,9·1J=0,9J και το υπόλοιπο (0,1J) είναι η κινητική του ενέργεια.

Ας δούμε και μια άλλη πλευρά για το έργο της δύναμης F1.

Θα μπορούσαμε να βρούμε το έργο της για τη μεταφορική κίνηση Wμ=-F1·xcm=-2J, ενώ το έργο της για την περιστροφική κίνηση, ίσο με το έργο της ροπής Wτ=τ·θ=+1J. Τι μετράνε τα παραπάνω έργα;

Η δύναμη F1 αφαιρεί ενέργεια 2J από την μεταφορική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου, από τα οποία το 1J μετατρέπεται σε περιστροφική κινητική ενέργεια, μέσω του έργου της ροπής, ενώ το άλλο 1J μεταφέρεται στο σώμα Σ.

Να τονισθεί ότι η εξίσωση (6) μας λέει ότι η περιστροφική κινητική ενέργεια είναι ίση με το έργο της ασκούμενης ροπής.

**dmargaris@sch.gr**