

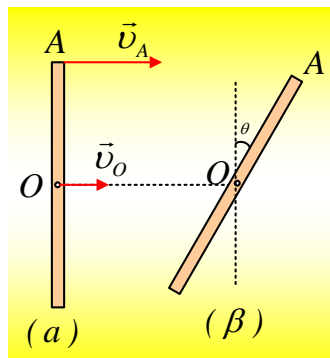
Κεντρομόλος και επιτρόχια επιτάχυνση.

Δυο στάθηκαν οι αφορμές για την παρούσα άσκηση. Η μια είναι η συζήτηση που πραγματοποιείται στο δίκτυο για τον [στιγμαίο](#) άξονα περιστροφής. Η άλλη ήταν ερώτηση που μου τέθηκε από φίλο, πάνω στην ανάρτηση «[Σύνθετη κίνηση στερεού.](#)».

Αν πάρουμε τη ράβδο σε μια τυχαία θέση, η ταχύτητα του άκρου μεταβάλλεται κατά μέτρο. Ποια είναι η επιτρόχια επιτάχυνση που μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας;

.....

Μια ομογενής ράβδος μήκους $\ell=2\text{m}$ κινείται στην επιφάνεια μιας παγωμένης λίμνης, χωρίς τριβές και σε μια στιγμή βρίσκεται στη θέση του σχήματος (α). Στη θέση αυτή η ταχύτητα του μέσου O της ράβδου είναι 2m/s , ενώ του άκρου A 4m/s . Οι δύο παραπάνω ταχύτητες έχουν την ίδια κατεύθυνση, κάθετες στη ράβδο. Μετά από λίγο η ράβδος βρίσκεται στη θέση (β) έχοντας στραφεί κατά 60° .



Για τη θέση αυτή να βρεθούν:

- i) Η ταχύτητα του άκρου A .
- ii) Η επιτάχυνση του A .
- iii) Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του A .
- iv) Η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του άκρου A .

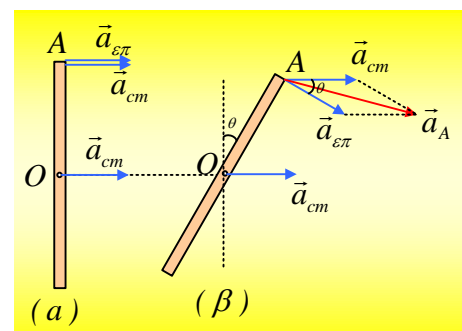
Απάντηση:

- i) Αφού οι ταχύτητες των σημείων O και A είναι διαφορετικές η ράβδος εκτελεί σύνθετη κίνηση. Μια μεταφορική με ταχύτητα κέντρου μάζας $v_{cm}=v_O=2\text{m/s}$ και μια στροφική γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας O με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Στην αρχική θέση (α) η ταχύτητα του άκρου A προκύπτει από την σύνθεση της ταχύτητας του κέντρου μάζας λόγω μεταφορικής κίνησης και μιας γραμμικής ταχύτητας μέτρου:

$$v_{\text{γραμ}} = \omega \cdot R. \text{ Έτσι}$$

$$v_A = v_{cm} + v_{\text{γραμ}} \rightarrow$$



$$v_{\gamma\rho\mu} = v_A - v_{cm} = 2\text{m/s}$$

Ερχόμαστε τώρα στη θέση (β). Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ταχύτητες του άκρου A, όπου μεταξύ της ταχύτητας κέντρου μάζας και της γραμμικής ταχύτητας σχηματίζεται γωνία $\theta=60^\circ$. Συνεπώς η ταχύτητα του σημείου A είναι:

$$v_A = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\gamma\rho}^2 + 2v_{cm}v_{\gamma\rho}\cos\theta} \rightarrow$$

$$v_A = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} \text{m/s} = 2\sqrt{3}\text{m/s}$$

Εξάλλου το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο έχει ίσες πλευρές, συνεπώς είναι ρόμβος και η διαγώνιος διχοτομεί την γωνία και η ταχύτητα του A σχηματίζει γωνία $\varphi=30^\circ$ με την οριζόντια διεύθυνση.

- ii) Η μεταφορική κίνηση του κέντρου O είναι ευθύγραμμη ομαλή, συνεπώς δεν υπάρχει επιτάχυνση. Λόγω όμως της στροφικής κίνησης το σημείο A εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχοντας κεντρομόλο επιτάχυνση:

$$a = \frac{v_{\gamma\rho}^2}{R} = \frac{2^2}{1} \text{m/s}^2 = 4\text{m/s}^2$$

με κατεύθυνση προς το μέσον O της ράβδου, όπως στο παρακάτω σχήμα.

- iii) Αναλύουμε την επιτάχυνση σε δύο συνιστώσες μια a_x που έχει τη διεύθυνση της ταχύτητας και μια a_y με διεύθυνση κάθετη στην ταχύτητα. (Η γωνία μεταξύ της επιτάχυνσης a και της a_y είναι ίση με 30° , αφού με την φ έχουν τις πλευρές κάθετες μία προς μία και οι γωνίες είναι οξείες). Τα μέτρα τους είναι:

$$a_x = a \cdot \eta\mu\varphi = 4 \cdot \frac{1}{2} \text{m/s}^2 = 2\text{m/s}^2 \text{ και}$$

$$a_y = a \cdot \sigma\upsilon\upsilon\varphi = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{m/s}^2 = 2\sqrt{3}\text{m/s}^2$$

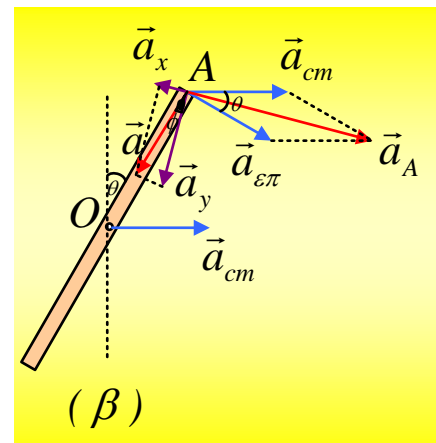
Η συνιστώσα a_x μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας και στην περίπτωση μας επειδή έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητα,

μειώνει το μέτρο της. Συνεπώς το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται με ρυθμό $2 \frac{\text{m/s}}{\text{s}}$.

- iv) Η συνιστώσα της επιτάχυνσης a_y είναι κάθετη στην ταχύτητα, συνεπώς μεταβάλλει την κατεύθυνσή της, παίζοντας το ρόλο της κεντρομόλου επιτάχυνσης για την κίνηση του σημείου A. Άρα:

$$a_y = \frac{v_A^2}{R} \rightarrow$$

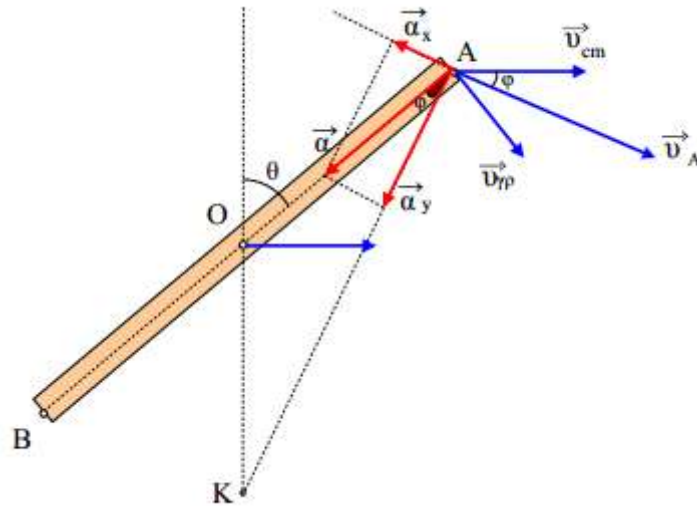
$$R = \frac{v_A^2}{a_y} = \frac{4 \cdot 3}{2\sqrt{3}} \text{m} = 2\sqrt{3}\text{m}$$



Σχόλιο μόνο για καθηγητές:

Η κίνηση της ράβδου μπορεί να θεωρηθεί μόνο στροφική γύρω από ένα στιγμιαίο άξονα περιστροφής που

περνά από ένα σημείο K. Το σημείο K μπορεί να προσδιοριστεί σαν το σημείο τομής της ευθείας που είναι κάθετη στην ταχύτητα του σημείου O, στο O και της κάθετης της ταχύτητας του σημείου A, που περνά από το A. (Και το σημείο O και το A θα εκτελούν κυκλική κίνηση γύρω από το σημείο K, συνεπώς οι ταχύτητες είναι κάθετες στις ακτίνες).



Το τρίγωνο AOK είναι ισοσκελές αφού $\varphi=30^\circ$ και η γωνία AOK=120°, συνεπώς και η γωνία K είναι επίσης 30°. Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$(AK) = \sqrt{(AO)^2 + (OK)^2 - 2(AO)(OK)\cos 120^\circ}$$

και με αντικατάσταση

$$(AK) = \sqrt{3}m.$$

Αλλά η απόσταση (KA) είναι η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του σημείου A, οπότε για την ταχύτητα θα έχουμε:

$$v_A = \omega \cdot R_A \rightarrow$$

$$v_A = 2 \cdot \sqrt{3}m/s$$

Δηλαδή μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα περιστροφής του σημείου A γύρω από το στιγμιαίο άξονα περιστροφής. Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε όμως την επιτάχυνση αφού δεν είναι μόνο η a_y αλλά και η a_x . Εξάλλου και η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς δεν συμπίπτει με την ακτίνα της τροχιάς. Η τροχιά του σημείου A δεν είναι κύκλος.

Προσοχή λοιπόν, άλλο ακτίνα καμπυλότητας και άλλο η απόσταση του σημείου A από τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής. Για περισσότερα πάνω στο θέμα μπορείτε να παρακολουθείτε την περσινή συζήτηση από [εδώ](#).

dmargaris@sch.gr