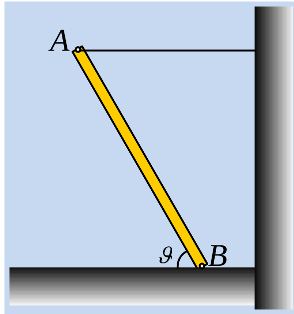
Ισορροπία και επιτάχυνση μιας δοκού.



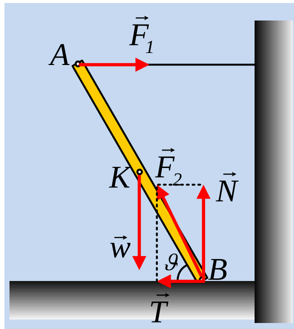
Μια ομογενής δοκός μάζας 12kg και μήκους ℓ ισορροπεί όπως στο σχήμα, δεμένη στο ένα της άκρο Α με την βοήθεια οριζόντιου νήματος, με κατακόρυφο τοίχο, ενώ στο άλλο της άκρο στηρίζεται στο οριζόντιο έδαφος, με το οποίο εμφανίζει συντελεστές τριβής μ=0,5 και μ_s=0,6, σχηματίζοντας με αυτό γωνία θ, όπου ημθ=0,8.

i) Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που ασκούνται από το νήμα και το έδαφος στη δοκό.

ii) Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα. Για τη στιγμή, αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος να βρεθούν οι επιταχύνσεις του κέντρου μάζας Κ και του άκρου Α της δοκού.

Δίνεται g=10m/s², ενώ η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της Κ είναι ίση $I=\frac{1}{12}M\ell^2$.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις **F₁** και **F₂** που ασκούνται στη ράβδο στα δυο άκρα της, όπου η F_2 έχει αναλυθεί σε δυο συνιστώσες της κάθετη αντίδραση **N** και την στατική τριβή **T**.

Από τη συνθήκη ισορροπίας της δοκού παίρνουμε:

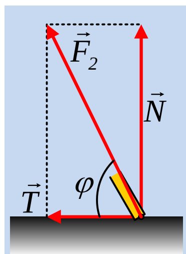
$$\Sigma\vec{F}=0 \Longrightarrow \begin{cases} \Sigma F_x=0 \rightarrow T=F_1 \ (1) \\ \Sigma F_y=0 \rightarrow N=w=Mg=120N \ (2) \end{cases}$$

$$\Sigma\tau_B=0 \rightarrow w\cdot(KB)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta - F_1\cdot(AB)\cdot\eta\mu\theta=0 \rightarrow$$

$$F_1=Mg\frac{(KB)\sigma\upsilon\nu\theta}{(AB)\eta\mu\theta}=\frac{1\cdot 0{,}6}{2\cdot 0{,}8}Mg=45N$$

Και από την σχέση (1) $T=T_s$= 45N.

(Ας ελέγξουμε αν μπορεί να επιτευχθεί η παραπάνω ισορροπία. Η οριακή τριβή μεταξύ δοκού και εδάφους είναι $T_{o\rho}=\mu_s\cdot N=0{,}6\cdot 120N=72N$, ενώ αναπτύσσεται στατική τριβή 45N, πράγμα που σημαίνει ότι η δοκός ισορροπεί).



Οπότε η δύναμη F_2 που δέχεται η δοκός από το έδαφος έχει μέτρο:

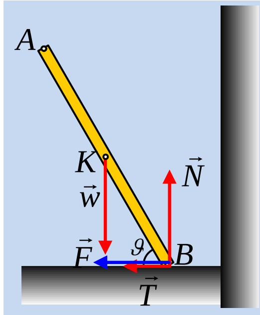
$$F_2=\sqrt{N^2+T^2}=\sqrt{120^2+45^2}N\approx 128N$$

Ενώ έχει διεύθυνση τέτοια που να σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία φ με:

$$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{N}{T}=\frac{120N}{45N}=\frac{24}{9}.$$

ii) Μόλις κόψουμε το νήμα, η δοκός θα πέσει. Το ερώτημα είναι τι κίνηση θα κάνει; Αυτό εξαρτάται από το αν γλιστρήσει στο άκρο της Β ή όχι.

Έστω ότι, ασκώντας στο άκρο Β μια κατάλληλη οριζόντια δύναμη **F** εξασφαλίζουμε ότι η δοκός στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, που περνά από το άκρο Β, χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.



Από το 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση, θα έχουμε, ως προς τον άξονα περιστροφής :

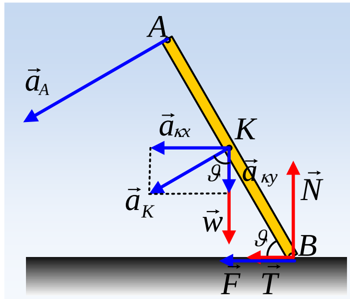
$$\Sigma\tau = I_B \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow Mg\cdot(BK)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = I_B\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}. \ (3)$$

Αλλά από το θεώρημα του Steiner έχουμε:

$$I_B = I_{cm} + Md^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}M\ell^2$$ και η σχέση (2) γίνεται:

$$Mg\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{3}M\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2\ell}\sigma\upsilon\nu\theta$$

Αλλά τότε το κέντρο μάζας Κ έχει επιτάχυνση:



$$a_K = a_{\gamma\omega\nu}\cdot R = \frac{3g}{2\ell}\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{3g}{4}\sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow$$

$$a_K = \frac{3\cdot 10}{4}0{,}6m/s^2 = 4{,}5m/s^2$$

Ενώ το άκρο Α:

$$a_A = a_{\gamma\omega\nu}\cdot R = \frac{3g}{2\ell}\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\ell = \frac{3}{2}g\sigma\upsilon\nu\theta = 9m/s^2.$$

Αλλά αναλύοντας την επιτάχυνση του κέντρου μάζα Κ σε δυο συνιστώσες μια οριζόντια και μια κατακόρυφη θα έχουμε (κεντρομόλος επιτάχυνση δεν υπάρχει, αφού τη στιγμή αυτή η ταχύτητα του Κ είναι μηδενική):

$$w\text{-}N = M\cdot\alpha_{\kappa y} \rightarrow N = Mg - M\cdot\alpha_K\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 120N - 12\cdot 4{,}5\cdot 0{,}6N = 87{,}6N$$

$$\kappa\alpha\iota\ F + T = M\cdot\alpha_{Kx} = M\cdot\alpha_K\cdot\eta\mu\theta = 12\cdot 4{,}5\cdot 0{,}8N = 43{,}2N$$

Αλλά η μέγιστη δυνατή τιμή της στατικής τριβής, η οριακή τριβή έχει μέτρο:

$$T_{o\rho} = \mu_s\cdot N = 0{,}6\cdot 87{,}6N = 52{,}6N$$

Και από την παραπάνω σχέση παίρνουμε:

$$F = 43{,}2N - 52{,}6N = -9{,}4N$$

πράγμα που σημαίνει ότι μπορούμε να ασκήσουμε ακόμη και δύναμη προς τα δεξιά με μέτρο 9,4Ν και το άκρο Β να παραμένει ακίνητο και να μην γλιστρά. Αλλά αυτό σημαίνει ότι δεν χρειάζεται η εξάσκηση καμιάς οριζόντιας δύναμης, όπως αρχικά υποθέσαμε, για να μην γλιστρήσει (αρχικά) η σανίδα, η οποία μόλις κοπεί το νήμα, αρχίζει μια περιστροφική κίνηση, γύρω από άξονα που περνά από το άκρο της Β.

Σχόλιο.

Και το ερώτημα που γεννιέται είναι, ωραία εδώ το άκρο Β δεν γλίστρησε. Και αν γλίστραγε;

Το θέμα θα το δούμε σε επόμενη ανάρτηση, ώστε να μην επιβαρύνουμε πολύ την παρούσα…

dmargaris@sch.gr