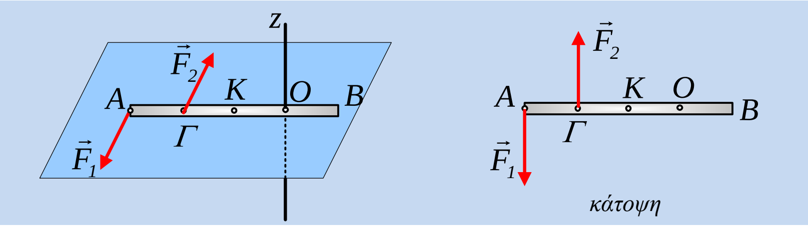
Η ράβδος, ο άξονας και το ζεύγος δυνάμεων.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια λεπτή ομογενής ράβδος ΑΒ, μήκους ℓ=4m και μάζας Μ=10kg, η οποία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από ένα σημείο της Ο, όπου (ΟΒ)=1m. Σε μια στιγμή t_0=0 ασκούνται πάνω της δυο δυνάμεις $\mathbf{F_1}$ και $\mathbf{F_2}$, σταθερού μέτρου $F_1=F_2=$ 10π Ν οι οποίες είναι διαρκώς κάθετες στη ράβδο, όπου η πρώτη ασκείται στο άκρο της Α, ενώ η δεύτερη σε σημείο Γ, όπου (ΑΓ)=1m, όπως στο σχήμα (δεξιά σε κάτοψη).



i) Να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση που θα αποκτήσει η ράβδος.

ii) Κατά ποια γωνία έχει περιστραφεί η ράβδος και ποια η γωνιακή της ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t_1=\sqrt{14}s \approx 3{,}7s$.

iii) Ποιά δύναμη (μέτρο και κατεύθυνση) ασκεί στη ράβδο ο άξονας z τη στιγμή t_1;

iv) Τη στιγμή t_1 ο άξονας σπάει και η ράβδος μπορεί πλέον να κινείται ελεύθερα. Να βρεθεί η θέση της και η γωνιακή της ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_2=5,7s.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I_{cm}=\frac{1}{12}M\ell^2$.

Απάντηση:

i) Από το 2° νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε, αφού υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου, ως προς τον άξονα z, με χρήση του θεωρήματος Steiner:

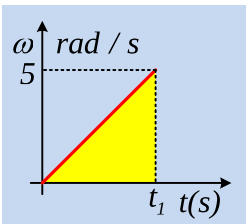
$$\Sigma\tau = I_o \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot d = \left(\frac{1}{12}M\ell^2 + M(KO)^2\right)\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{F\cdot\frac{\ell}{4}}{\frac{1}{12}M\ell^2 + M\frac{\ell^2}{16}} = \frac{12F}{7M\ell} = \frac{12\cdot 10\pi}{7\cdot 10\cdot 4} rad/s^2 = \frac{3}{7}\pi \;\; rad/s^2.$$

ii) Η παραπάνω γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου είναι σταθερή, αφού σταθερή είναι και η ροπή του ζεύγους των δύο δυνάμεων. Αλλά τότε:

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - 0}{t_1 - 0} \rightarrow$$

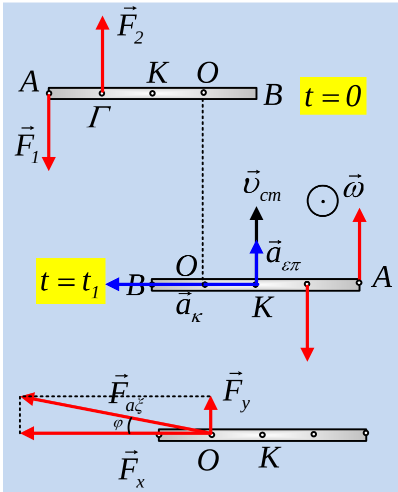
$$\omega_1 = a_{\gamma\omega\nu}\cdot t_1 = \frac{3}{7}\pi\cdot 3{,}7 rad/s = 1{,}6\pi \; rad/s = 5 \; rad/s.$$



Ενώ κάνοντας τη γραφική παράσταση της σχέσης $\omega = a_{\gamma\omega\nu}\cdot t$, το εμβαδόν του σχηματιζόμενου χωρίου (τριγώνου με κίτρινο χρώμα), είναι αριθμητικά ίσο με τη γωνία που διαγράφει η ράβδος.

$$\vartheta = \frac{1}{2}t_1\omega = \frac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu}t_1^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{7}\pi \cdot \left(\sqrt{14}\right)^2 rad = 3\pi\ rad.$$

iii) Τη στιγμή t_1, με βάση την απάντηση στο παραπάνω ερώτημα, η ράβδος έχει εκτελέσει 1,5 περιστροφή και στο διπλανό σχήμα φαίνεται η θέση της, ενώ το κέντρο μάζας της Κ, έχει ταχύτητα:



$$\upsilon_{cm}=\omega\cdot R = \omega\cdot\frac{\ell}{4} = 1{,}6\pi = 5m/s$$

Αλλά τότε το κέντρο μάζας της ράβδου Κ έχει μια επιτάχυνση στη διεύθυνση της ταχύτητας, επιτρόχια επιτάχυνση, ίση με το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας:

$$a_{\varepsilon\pi} = \frac{d|\upsilon_{cm}|}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R = a_{\gamma\omega\nu}\frac{\ell}{4}.$$

$$a_{\varepsilon\pi} = a_{\gamma\omega\nu}\frac{\ell}{4} = \frac{3\pi}{7}m/s^2 \approx 1{,}3m/s^2$$

Και μια κεντρομόλο επιτάχυνση, υπεύθυνη για την αλλαγή στη διεύθυνση της ταχύτητας, μέτρου:

$$\alpha_\kappa=\omega^2\cdot R=5^2\cdot 1m/s^2=25m/s^2.$$

Εφαρμόζοντας τώρα το 2[ο] νόμο του Νεύτωνα για το κέντρο μάζας της ράβδου παίρνουμε:

$$\sum\vec{F} = M\vec{a}_{cm} \Rightarrow \begin{cases} F_x=M\cdot\alpha_x \\ F_y=M\cdot\alpha_y \end{cases}$$

$F_x=M\cdot\alpha_\kappa=10\cdot 25N=250N$ και $F_y=M\cdot\alpha_y=10\cdot 1{,}3N=13N$, οπότε:

$$F_{\alpha\xi} = \sqrt{F_x^2+F_y^2} = \sqrt{250^2+13^2}N \approx 280{,}3N$$

$$\text{Και } \varepsilon\varphi\phi = \frac{F_y}{F_x} = \frac{13}{250} = 0{,}05$$

iv) Μόλις σπάσει ο άξονας, το κέντρο μάζας Κ θα κινηθεί πλέον ευθύγραμμα, με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_{cm}=\upsilon_y=5m/s$ στην διεύθυνση y, κάθετα στην αρχική διεύθυνση της ράβδου, αφού η συνισταμένη δύναμη που δέχεται είναι μηδενική. Η μετατόπιση του κέντρου μάζας θα είναι λοιπόν:

$$\Delta y=\upsilon_{cm}\cdot(t_2-t_1) =5\cdot 2m =10m$$

Αλλά αφού ασκείται πάνω της το ζεύγος δυνάμεων, θα συνεχίσει να επιταχύνεται στροφικά εκτελώντας επιταχυνόμενη στροφική κίνηση, γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της Κ (κέντρο μάζας).

$$\Sigma\tau=I_{cm}\cdot\alpha_{1\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot d=\left(\frac{1}{12}M\ell^2\right)\cdot a_{1\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

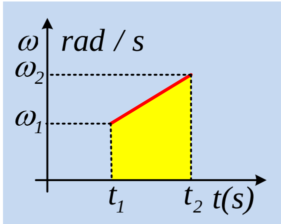
$$a_{1\gamma\omega\nu}=\frac{F\cdot\frac{\ell}{4}}{\frac{1}{12}M\ell^2}=\frac{3F}{M\ell}=\frac{3\cdot 10\pi}{10\cdot 4}rad/s^2=\frac{3}{4}\pi\,rad/s^2.$$

$$\text{Αλλά } a_{1\gamma\omega\nu}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\omega-\omega_1}{t_2-t_1}\rightarrow$$

$$\omega_2=\omega_1+\alpha_{1\gamma\omega\nu}(t_2-t_1)\rightarrow$$

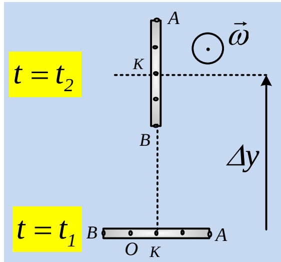
$$\omega_2=\left(5+\frac{3}{4}\pi\cdot 2\right)rad/s=9{,}7rad/s.$$

Εξάλλου η ράβδος θα έχει περιστραφεί κατά γωνία Δφ, ίση με το εμβαδόν του τραπεζίου, του διπλανού πάνω σχήματος:



$$\Delta\varphi=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}(t_2-t_1)=\frac{9{,}7+5}{2}2rad=14{,}7rad\approx 4{,}5\pi \text{ rad}$$

Στο κάτω σχήμα, φαίνονται η αρχική και η τελική θέση της ράβδου (σε…. σμίκρυνση!!!).



Σχόλια:

1) Στον υπολογισμό της γωνιακής μετατόπισης (της γωνίας περιστροφής της ράβδου) χρησιμοποιήσαμε τα εμβαδά στο διάγραμμα ω-t. Αυτό μας το επέβαλε η μη απόδειξη στο σχολικό βιβλίο των μαθηματικών εξισώσεων:

$$\omega=\omega_0+\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\Delta t \quad \text{και } \Delta\varphi=\omega_0\cdot\Delta t+½\,\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot(\Delta t)^2$$

εξισώσεις ανάλογες της ταχύτητας και της μετατόπισης της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.

2) Για όσο χρόνο υπάρχει άξονας, υποχρεώνεται η ράβδος να περιστραφεί γύρω από τον πραγματικό αυτό άξονα. Βέβαια για να συμβαίνει αυτό ο άξονας ασκεί στη διάρκεια της κίνησης δύναμη στην ράβδο, όπως υπολογίστηκε στο δεύτερο ερώτημα. Όταν σπάσει ο άξονας, οπότε δεν μπορεί πλέον να ασκείται η παραπάνω δύναμη, η ράβδος θα στρέφεται γύρω από κάποιον άλλον άξονα, που «δεν θα χρειάζεται να της ασκεί δύναμη». Αλλά αυτός ο άξονας δεν μπορεί παρά να είναι ο άξονας που θα περνά από το κέντρο μάζας, αφού μόνο τότε το κέντρο μάζας, μπορεί να μην έχει επιτάχυνση και δεν απαιτείται να του ασκηθεί καμιά δύναμη. Τέτοιος **πραγματικός** βέβαια άξονας δεν υπάρχει, αλλά τότε η ράβδος στρέφεται γύρω από **νοητό** κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας Κ. Και γύρω από αυτόν τον άξονα υπολογίσαμε τη γωνιακή επιτάχυνση και γωνιακή ταχύτητα στο τελευταίο ερώτημα…

dmargaris@sch.gr