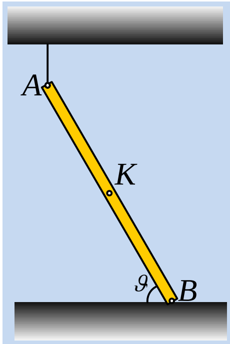
Η ράβδος γλιστράει…

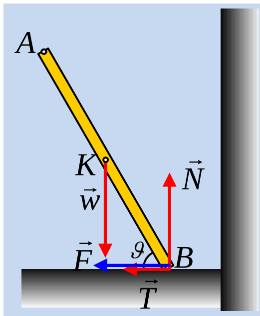


Μια ομογενής δοκός ΑΒ μάζας 12kg και μήκους ℓ ισορροπεί όπως στο σχήμα, δεμένη στο άκρο κατακόρυφου νήματος, ενώ το άκρο της Β στηρίζεται στο έδαφος, σχηματίζοντας με αυτό γωνία θ, όπου ημθ=0,8. Η δοκός εμφανίζει με το έδαφος συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0{,}2$. Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα. Για τη στιγμή, αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος να βρεθούν οι επιταχύνσεις του κέντρου μάζας Κ και του άκρου Α της δοκού.

Δίνεται $g=10m/s^2$, ενώ η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της Κ ισχύει $I_{cm}=\frac{1}{12}M\ell^2$.

Απάντηση:

Μόλις κόψουμε το νήμα, η δοκός θα πέσει. Το ερώτημα είναι τι κίνηση θα κάνει; Αυτό εξαρτάται από το αν γλιστρήσει στο άκρο της Β ή όχι.



Έστω ότι, ασκώντας στο άκρο Β μια κατάλληλη οριζόντια δύναμη **F** εξασφαλίζουμε ότι η δοκός στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, που περνά από το άκρο Β, χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.

Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση, θα έχουμε, ως προς τον άξονα περιστροφής :

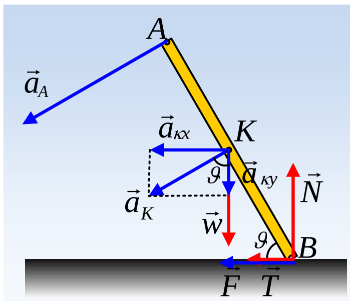
$$\Sigma\tau=I_B\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow Mg\cdot(BK)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta= I_B\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}. \ (3)$$

Αλλά από το θεώρημα του Steiner έχουμε:

$$I_B=I_{cm}+Md^2=\frac{1}{12}M\ell^2+M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2=\frac{1}{3}M\ell^2$$ και η σχέση (2) γίνεται:

$$Mg\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{3}M\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu}\rightarrow a_{\gamma\omega\nu}=\frac{3g}{2\ell}\sigma\upsilon\nu\theta$$

Αλλά τότε το κέντρο μάζας Κ έχει επιτάχυνση:



$$a_K=a_{\gamma\omega\nu}\cdot R=\frac{3g}{2\ell}\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\frac{\ell}{2}=\frac{3g}{4}\sigma\upsilon\nu\theta\rightarrow$$

$$a_K=\frac{3\cdot 10}{4}0{,}6m/s^2=4{,}5m/s^2$$

Ενώ το άκρο Α:

$$a_A=a_{\gamma\omega\nu}\cdot R=\frac{3g}{2\ell}\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\ell=\frac{3}{2}g\sigma\upsilon\nu\theta=9m/s^2.$$

Αλλά αναλύοντας την επιτάχυνση του κέντρου μάζα Κ σε δυο συνιστώσες μια οριζόντια και μια κατακόρυφη θα έχουμε (κεντρομόλος επιτάχυνση δεν υπάρχει, αφού τη στιγμή αυτή η ταχύτητα του Κ είναι μηδενική):

$$w\text{-}N=M\cdot\alpha_{\kappa y} \rightarrow N=Mg\text{-}M\cdot\alpha_K\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=120N\text{-}12\cdot4{,}5\cdot0{,}6N=87{,}6N$$

$$\kappa\alpha\iota\ F+T=M\cdot\alpha_{Kx}=M\cdot\alpha_K\cdot\eta\mu\theta=12\cdot4{,}5\cdot0{,}8N=43{,}2N$$

Αλλά η μέγιστη δυνατή τιμή της στατικής τριβής, η οριακή τριβή έχει μέτρο:

$$T_{o\rho}=\mu_s\cdot N=0{,}2\cdot87{,}6N=17{,}5N$$

Και από την παραπάνω σχέση παίρνουμε:

$$F=43{,}2N\text{-}17{,}52N=25{,}7N$$

Αλλά αυτό σημαίνει, ότι χωρίς την δράση της δύναμης F, η δοκός θα γλιστρήσει!!!

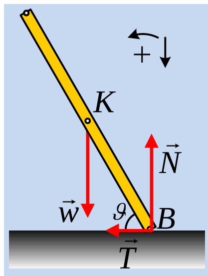
……………………….

(*Προφανώς η λύση, μέχρι τη στιγμή αυτή, είναι η λύση της προηγούμενης ανάρτησης με τίτλο:*

Ισορροπία και επιτάχυνση μιας δοκού.)

………………………………..

… Οπότε, πάμε από την αρχή!!!



Η δοκός εκτελεί σύνθετη κίνηση, η οποία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελείται από μια μεταφορική και μια στροφική, γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, που περνά από το μέσον K της δοκού.

Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα παίρνοντας:

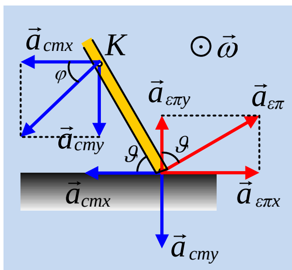
Μεταφορική κίνηση: $\Sigma\vec{F}=M\vec{a}_{cm} \Longrightarrow \begin{cases}\Sigma F_x=M\cdot\alpha_{cmx} \rightarrow T_{o\lambda}=M\cdot\alpha_{cmx}\ (4)\\ \Sigma F_y=M\cdot\alpha_{cmy} \rightarrow Mg\text{-}N=M\cdot\alpha_{cmy}\ (5)\end{cases}$

Όπου $T_{o\lambda}=\mu\cdot N$ η τριβή ολίσθησης.

Στροφική κίνηση:

$$\Sigma\tau_K=I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow N\cdot\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta-T\cdot\frac{\ell}{2}\eta\mu\theta=\frac{1}{12}M\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$N\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-T\cdot\eta\mu\theta=\frac{1}{6}M\ell\cdot a_{\gamma\omega\nu}\quad(6)$$



Οι εξισώσεις (4,), (5) και (6) αποτελούν ένα σύστημα που έχει 4 αγνώστους, οπότε χρειαζόμαστε μια ακόμη εξίσωση. Αυτή θα προκύψει αν εστιάσουμε στην κίνηση του άκρου B, το οποίο μπορεί να κινηθεί μόνο οριζόντια. Το άκρο B έχει την επιτάχυνση του κέντρου μάζας και μια επιτρόχια επιτάχυνση κάθετη στη δοκό με μέτρο $\alpha_{\varepsilon\pi}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\frac{\ell}{2}$. Αλλά το άκρο B δεν θα επιταχυνθεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, οπότε:

$$a_{\varepsilon\pi y}=a_{cmy} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta=\alpha_{cmy} \rightarrow a_{\gamma\omega\nu}\ell=\frac{2\alpha_{cmy}}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

Οπότε η σχέση (6) γράφεται:

$$N\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-T\cdot\eta\mu\theta=\frac{1}{3}M\frac{a_{cmy}}{\sigma\upsilon\nu\theta}\quad(6^{\alpha})$$

Ας επιλύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (4), (5) και (6α), αντικαθιστώντας αριθμητικές τιμές (προς το ευκολότερο!)

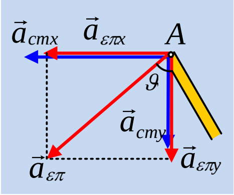
$$\left.\begin{array}{|l} T_{ολ}=M\cdot α_{cmx} \\ Mg-N=M\cdot α_{cmy} \\ N\cdot συνθ - T\cdot ημθ = \dfrac{1}{3}M\dfrac{α_{cmy}}{συνθ} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{|l} 0{,}2N=12\cdot α_{cmx} \\ 120-N=12\cdot α_{cmy} \\ N\cdot 0{,}6 - 0{,}2N\cdot 0{,}8 = \dfrac{1}{3}12\dfrac{α_{cmy}}{0{,}6} \end{array}$$

Από την λύση του συστήματος βρίσκουμε $α_{cmx} \approx 1{,}1 m/s^2$, $α_{cmy} \approx 4{,}4 m/s^2$ και $α_{επ} = α_{γων}\cdot \dfrac{\ell}{2} \approx 7{,}3 m/s^2$.

Αλλά τότε το κέντρο μάζας Κ έχει επιτάχυνση μέτρου:

$$a_{cm} = \sqrt{(a_{cmx})^2 + (a_{cmy})^2} = \sqrt{1{,}1^2 + 4{,}4^2}\, m/s^2 \approx 4{,}54 m/s^2$$

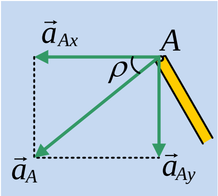
Σχηματίζοντας με την οριζόντια διεύθυνση γωνία φ, με $εφφ = \dfrac{a_{cmy}}{a_{cmx}} = 4$.



Εξάλλου το άκρο Α έχει επιταχύνσεις:

$$α_x = α_{cmx} + α_{επ}\cdot ημθ = (1{,}1 + 7{,}3\cdot 0{,}8)\, m/s^2 \approx 6{,}9 m/s^2$$

$$α_y = α_{cmy} + α_{επ}\cdot συνθ = (4{,}4 + 7{,}3\cdot 0{,}6)\, m/s^2 \approx 8{,}8 m/s^2.$$



Οπότε το μέτρο της επιτάχυνσής του είναι:

$$a_A = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} = \sqrt{6{,}9^2 + 8{,}8^2}\, m/s^2 \approx 11{,}2 m/s^2$$

Σχηματίζοντας με την οριζόντια διεύθυνση γωνία ρ, με $εφρ = \dfrac{a_y}{a_x} \approx 1{,}28$

Σχόλιο:

Νομίζω ότι η προηγούμενη ανάρτηση, που το άκρο Β δεν ολισθαίνει, είναι ένα δύσκολο θέμα, το οποίο όμως θα μπορούσε να διαπραγματευθεί ένας καλός μαθητής.

Η παρούσα, έχω την αίσθηση ότι τραβάει μεγάλη ανηφόρα και δεν προσφέρεται για μαθητές, οπότε θα την αναρτήσω στο Blogspot, μόνο για Καθηγητές…

dmargaris@sch.gr