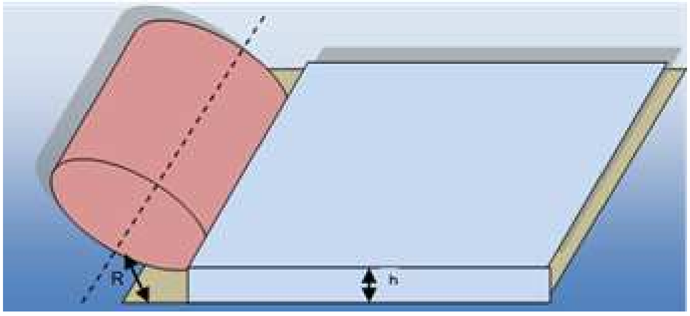
Ελάχιστη δύναμη και ενέργεια για ν' ανέβει ο κύλινδρος το σκαλοπάτι..



Κύλινδρος συμπαγής μάζας **M=100kg** ,ακτίνας **R=0,5m** και ροπής αδράνειας **I_{cm}=$\frac{1}{2}MR^2$** πρόκειται να ανεβεί σε σκαλοπάτι ύψους **h=0,2m** . Δίνεται **g=10m/s^2**. Η τριβή με την κόχη του σκαλοπατιού είναι αρκετή, ώστε να μην έχουμε ολίσθηση .

1. Ποια η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να δαπανήσουμε για να τον ανεβάσουμε .
2. Πόση είναι η ελάχιστη σταθερή, εφαπτομενική στον κύλινδρο, δύναμη, που πρέπει να ασκήσουμε με το κάθε χέρι μας, και σε ποια σημεία του κυλίνδρου, για να τον ανεβάσουμε.
3. Ποια η ελάχιστη γωνία στροφής ,που πρέπει να ασκήσουμε τις δυνάμεις με τα χέρια μας , ώστε ο κύλινδρος να ανεβεί με μηδενική κινητική ενέργεια.
4. Ποιος ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας κατά την άνοδο και σε ποια θέση συμβαίνει αυτό.
5. Αν επαναλάβουμε ,ασκώντας τις δυνάμεις των χεριών μας μέχρι ν' ανεβεί ο κύλινδρος και μετά πάψουμε να την ασκούμε, ποια η κινητική ενέργεια τη στιγμή που έχει ανεβεί.

6. Αμέσως μετά τη στιγμή που ανέβηκε ο κύλινδρος, ασκούμε με τις παλάμες μας πιέζοντας , ίσες δυνάμεις κατακόρυφες, στο ανώτερο σημείο του κυλίνδρου, και ο κύλινδρος σταματά μετά από **3m**, κυλιόμενος. Τα χέρια μας ολισθαίνουνε πάνω στον κύλινδρο, μέχρι αυτός να σταματήσει.

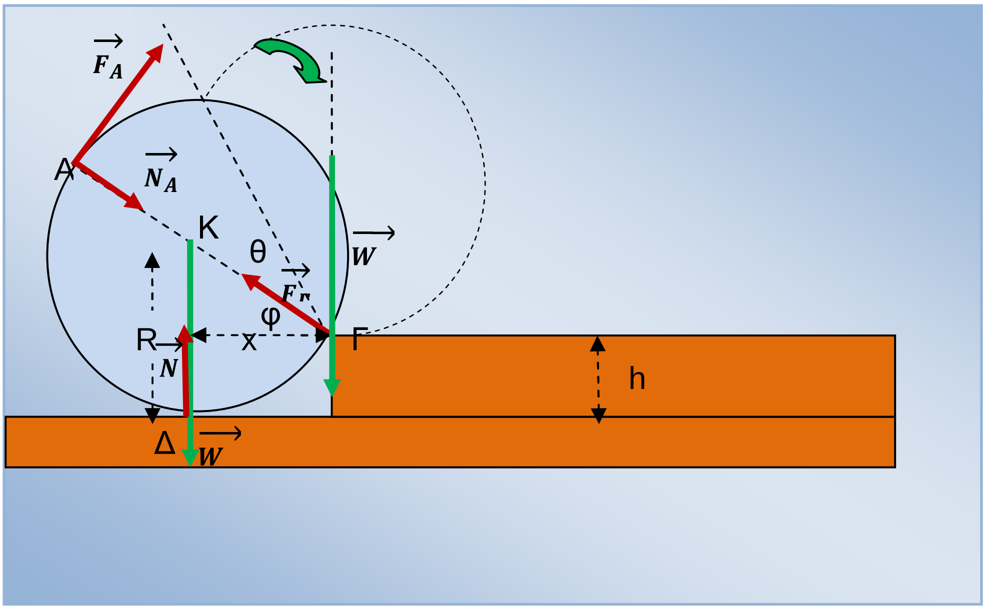
α) Σε πόσο χρόνο σταματά

β) αν ο συντελεστής τριβής των χεριών μας με τον κύλινδρο είναι **μ=0,8** , πόση είναι η κάθετη δύναμη που ασκούμε με κάθε χέρι μας, μέχρι να σταματήσει.
Δίνονται συν37^o=0,8 , ημ 37^o=0,6 συν14,3^o=συν0,25rad=0,969 , συν51,3^o=0,625 ,ημ51,3^o=0,78 51,3^o=0,895rad , 37^o=0,645rad

Απάντηση:

1. Η ελάχιστη ενέργεια που δαπανάται είναι όταν ο κύλινδρος ανεβεί το σκαλοπάτι με μηδενική κινητική ενέργεια. Άρα το έργο αυτό είναι ίσο με την αύξηση της δυναμικής ενέργειάς του. **W= mgh=** 100.10.0,2J= **200J.**

2. Όταν ο κύλινδρος τείνει ν' ανέβει ,δεν ακουμπά στο δάπεδο οπότε η κάθετη αντίδραση N είναι μηδέν.
Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω του είναι: το **βάρος W**, η δύναμη στην κόχη του σκαλοπατιού $\mathbf{F_Γ}$, οι δυο εφαπτομενικές στον κύλινδρο δυνάμεις των χεριών μας με συνισταμένη $\mathbf{F_A}$, που ***ασκούνται συμμετρικά ως προς το κατακόρυφο επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας***, για να μην έχουμε οριζόντια περιστροφή, καθώς και η ακτινική δύναμη των χεριών μας με συνισταμένη $\mathbf{N_A}$, έτσι ώστε να είναι ίσες μεταξύ τους.



Η ροπή του βάρους ως προς το Γ αρχικά είναι :$τ_{w(Γ)}$= -mgx=-mg$\sqrt{R^2-(R-h)^2}$=
=-mg$\sqrt{h(2R-h)}$=-2000· $\sqrt{0{,}2\cdot(1-0{,}2)}$=-800Nm.

Οι ροπές των N_A και $F_Γ$ ως προς το Γ είναι μηδέν, ως διερχόμενες (οι φορείς τους) από το Γ. Η ροπή της F_A ως προς το Γ είναι $τ_{FA}=F_A.d_Γ$. Για να ανεβεί ο κύλινδρος το σκαλοπάτι, πρέπει η συνολική ροπή ως προς το Γ να είναι μεγαλύτερη ή οριακά ίση με το μηδέν. $Στ_Γ \geq 0$ $F_Ad_Γ-800 \geq 0$ ή $F_Ad_Γ \geq 800Nm$ ή $F_{A,min}d_{Γ,max} \geq 800Nm$

Όμως η μεγαλύτερη απόσταση από το Γ είναι 2R ή $d_{Γ,max}$=2R=1m άρα $\mathbf{F_{A,min}}$**=800N** και κάθε χέρι ασκεί εφαπτομενική ελάχιστη δύναμη **400N.**

3. Το έργο της ροπής των δυνάμεων που ασκούμε με τα χέρια μας είναι ίσο κατ' απόλυτη τιμή, με το έργο του βάρους μέχρι να ανεβεί ο κύλινδρος το σκαλοπάτι με μηδενική κινητ. ενέργεια:

W= $\mathbf{F_{A,min}}$.$\mathbf{d_{Γ,\ max}}$.$\mathbf{θ_{min}}$= 800.1.$θ_{min}$=200 ή $\mathbf{θ_{min}}$= **0,25rad**=$\frac{1}{4}\cdot\frac{360^o}{2\pi}=\frac{45^o}{\pi}=$ **14,3°**

4. Είναι $\frac{dK}{dt}=\frac{\sum_{(\Gamma)}\tau\cdot d\vartheta}{dt}=\sum_{(\Gamma)}\tau\cdot\omega=(F_A\cdot 2R-mg\cdot x_1)\cdot\omega$ (1)

Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας συμβαίνει στο τέλος της επιταχυνόμενης στροφικά κίνησης του κυλίνδρου. Επειδή ο πολλαπλασιαστέος όρος $(\boldsymbol{F_A\cdot 2R-mg\cdot x_1})$ είναι διαρκώς θετικός, κι αυτό γιατί ο μοχλοβραχίονας x της ροπής του βάρους W ως προς το Γ, μειώνεται διαρκώς ,ενώ ο όρος $\boldsymbol{F_A\cdot 2R}$ μένει σταθερός, ο μέγιστος ρυθμός της κιν. ενέργ. θα συμβεί λίγο πριν καταργήσουμε την F_A, γιατί μέχρι τότε αυξάνονταν η γωνιακή ταχύτητα ω, κι αμέσως μετά ,αρχίζει η επιβραδυνόμενη κίνησή του(κατάργηση της F_A).

Είναι συν(θ+φ)=$\frac{x_1}{R}$ ή x_1=Rσυν(θ+φ) όμως συνφ=$\frac{x}{R}=\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R}=\frac{0{,}4}{0{,}5}=0{,}8$ άρα φ=37^o=0,645rad και φ+θ=51,3^o =0,895rad

x_1=0,2.συν51,3^o=0,2.0,625==0,125m

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. μέχρι τη θέση κατάργησης της F_A κι έχουμε:

$K_{τελ.}-K_{αρχ.}=W_{FA}+W_B$, $\frac{1}{2}I_A\omega^2-0=F_A\cdot 2R\cdot(\varphi+\theta)-mg[R\eta\mu(\varphi+\vartheta)$-(R-h)]

I_A= I_{cm}+MR^2=$\frac{1}{2}MR^2$+MR^2 ή $\boldsymbol{I_A=\frac{3}{2}MR^2}$ και αντικαθιστώντας έχουμε:

$\frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\omega^2-0=F_A\cdot 2R\cdot(\varphi+\theta)-mg[R\eta\mu(\varphi+\vartheta)$-(R-h)]

$\frac{3}{4}\cdot 100\cdot 0{,}5^2\omega^2=800\cdot 1\cdot$0,895-1000(0,78.0,5-0,3)

18,75 $\omega^2=626$ ή **ω=5,778r/s**

Από την (1) έχουμε: $\frac{dK}{dt}$=$(F_A\cdot 2R-mg\cdot x_1)\cdot\omega=$

$$=(800\cdot 1-1000\cdot 0{,}125)\cdot 5{,}778=\boldsymbol{3900J/s}$$

5. Εφαρμόζουμε το θ.Μ.Κ.Ε. από την αρχική θέση μέχρι ν' ανεβεί, κι έχουμε:

$K_{τελ.}-K_{αρχ.}=W_{FA}+W_B$, $\frac{1}{2}I_A\omega'^2-0=F_A\cdot 2R\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)-mgh$

, $\frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\omega'^2$ =800.1.(1,57-0,645)-200

18,75 $\omega'^2=540$ ή **ω'=5,36r/s**

6. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας ,όταν ο κύλινδρος είναι οριζόντιος ,είναι

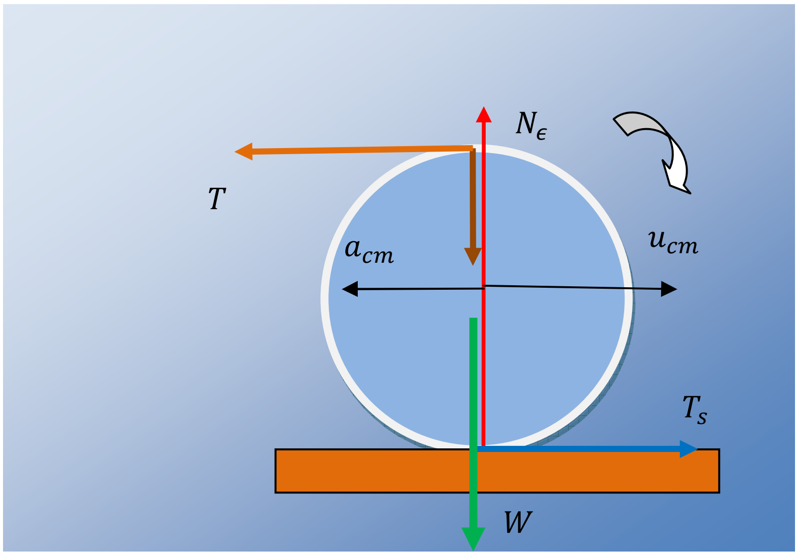
$\boldsymbol{u_{cm}}$**=ω'R**=5,36.0,5=**2,68m/s**, και η γωνιακή ταχύτητα γύρω από το κέντρο μάζας, παραμένει ίδια **ω'=5,36 r/s** . Το c.m. κάνει ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση , και ο κύλινδρος σταματά σε απόσταση $\boldsymbol{x_{cm}}$**=3m**

$u_{cm}' = u_{cm} - a_{cm}t$, $x_{cm} = u_{cm}t - \frac{1}{2}a_{cm}t^2$

Όταν σταματά $u_{cm}=0$ $t=\frac{u_{cm}}{a_{cm}}$ και $x_{cm}=\frac{u_{cm}^2}{2a_{cm}}$ ή $\mathbf{a_{cm}}=\frac{u_{cm}^2}{2x_{cm}}=\frac{2{,}68^2}{2.3}=\mathbf{1{,}2m/s^2}$

άρα **t**=2,68/1,2=**2,23s**

β) Η συνολική τριβή ολίσθησης των χεριών μας με τον κύλινδρο είναι : ***T=μN***



$\Sigma F_x = ma_{cm}$, $\boldsymbol{T-T_s= Ma_{cm}}$ **(2)** $\mathbf{a_{cm}}$ η επιβράδυνση του κέντρου μάζας

$\Sigma\tau_{(cm)} = I_{cm}\alpha_\gamma$, $TR+T_sR=\frac{1}{2}MR^2\alpha_\gamma$, $\mathbf{T+T_s=\frac{1}{2}Ma_{cm}}$ **(3)** ,, $\mathbf{a_{cm}=\alpha_\gamma R}$ **(4)**

Προσθέτω τις (2) και (3) κι έχω: $\mathbf{2T=\frac{3}{2}Ma_{cm}}$ ή $\mathbf{T=\frac{3}{4}Ma_{cm}=\frac{3}{4}100.1{,}2=90N}$

μ=T/N ή N=T/μ=90/0,8=112,5N

Άρα το κάθε χέρι μας ασκεί κατακόρυφη δύναμη $\mathbf{N_\chi=N/2=56{,}25N}$**.**

Πρόδρομος Κορκίζογλου

7ο Γ.Ε.Λ. Νέας Σμύρνης ***prodkork@hotmail.com***