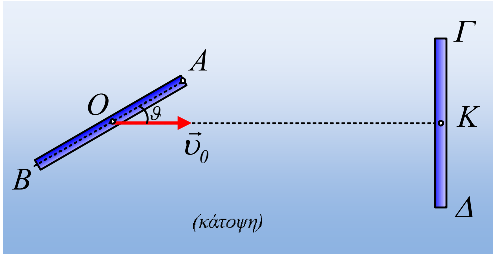
Δυο ράβδοι συγκρούονται ελαστικά. Για καθηγητές μόνο!

Πάνω σε μια παγωμένη λίμνη κινείται οριζόντια εκτελώντας μόνο μεταφορική κίνηση, μια οριζόντια ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους ℓ=1m και μάζας m, με σταθερή ταχύτητα υ_0=3,5m/s, η οποία σχηματίζει γωνία θ=30° με τη ράβδο. Μια δεύτερη όμοια ράβδος ΓΔ ηρεμεί όπως στο σχήμα, όπου η διεύθυνση της ταχύτητας του μέσου Ο της ΑΒ, είναι κάθετη στην ΓΔ, στο μέσον της Κ .

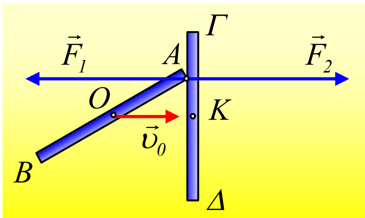


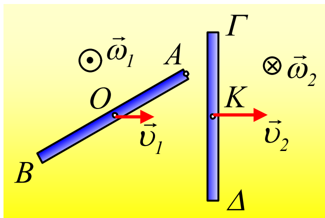
Να βρεθούν η ταχύτητα και η γωνιακή ταχύτητα κάθε ράβδου, μετά την ελαστική μεταξύ τους κρούση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I=\frac{1}{12}m\ell^2$.

Απάντηση:

Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στις δύο ράβδους, κάθετες στην επιφάνεια επαφής, συνεπώς κάθετες στην δεύτερη ράβδο. Αλλά τότε σε κάθε ράβδο στη διάρκεια της κρούσης ασκείται ροπή ως προς το μέσον της, με αποτέλεσμα να αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση και να περιστραφεί. Έτσι μετά την κρούση οι ράβδοι θα εκτελέσουν σύνθετη κίνηση. Εξάλλου το σύστημα των δύο ράβδων είναι μονωμένο με αποτέλεσμα να διατηρείται η ορμή του συστήματος αλλά και η στροφορμή του, ως προς οποιοδήποτε σημείο. Με βάση αυτά και αφού παρατηρήσουμε ότι οι ασκούμενες δυνάμεις έχουν την διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας υ_o, οπότε θα μεταβάλουν τις ταχύτητες των δύο ράβδων, στην ίδια διεύθυνση, παίρνουμε:





(μετά)

$$\vec{P}_{\pi\rho}=\vec{P}_{\mu\varepsilon\tau}\rightarrow$$

$$m_1\upsilon_o=m_1\cdot\upsilon_1+m_2\cdot\upsilon_2\rightarrow$$

$$\upsilon_o=\upsilon_1+\upsilon_2 \quad (1)$$

Αν εφαρμόσουμε τώρα την Α.Δ.Σ, ως προς το μέσον Κ της δεύτερης ράβδου, θα πάρουμε:

$$\vec{L}_{\pi\rho}=\vec{L}_{\mu\varepsilon\tau}\rightarrow$$

$$0=I_1\cdot\omega_1-I_2\cdot\omega_2 \rightarrow$$

$$\omega_1=\omega_2=\omega$$

με κατευθύνσεις όπως στο παραπάνω σχήμα.

Αλλά αφού η κρούση είναι ελαστική η κινητική ενέργεια πριν την κρούση, είναι ίση με την κινητική ενέργεια μετά την κρούση:

$$K_{\pi\rho\iota\nu} = K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2$$

Αλλά $m_1=m_2=m$, $\omega_1=\omega_2=\omega$ και $I_1=I_2=\dfrac{1}{12}m\ell^2$ και με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$m\upsilon_o^2 = m\upsilon_1^2 + m\upsilon_2^2 + \frac{1}{12}m\ell^2\omega^2 + \frac{1}{12}m\ell^2\omega^2 \rightarrow$$

$$6\upsilon_o^2 = 6\upsilon_1^2 + 6\upsilon_2^2 + \ell^2\omega^2 \quad (2)$$

Ας επικεντρωθούμε τώρα στην δεύτερη ράβδο.

Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, για τη μεταφορική της κίνηση, παίρνουμε:

$$\frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{F}_2 \rightarrow P_{2/\tau\varepsilon\lambda} - P_{2/\alpha\rho\chi} = \int F_2 dt \rightarrow$$

$$m_2\upsilon_2 = \int F_2 dt \quad (\alpha)$$

Εξάλλου από τον γενικευμένο νόμο για την περιστροφική κίνηση της ράβδου, ως προς το κέντρο μάζας Κ, παίρνουμε:

$$\frac{dL_2}{dt} = \Sigma\tau \rightarrow L_{2/\tau\varepsilon\lambda} - L_{2/\alpha\rho\chi} = \int F_2 x dt = x\int F_2 dt \rightarrow$$

$$I_2\omega_2 = x\int F_2 dt \quad (\beta)$$

Όπου x η απόσταση ΑΚ=$\dfrac{\ell}{2}\eta\mu\theta = \dfrac{\ell}{4}$.

Διαιρώντας τις (11) και (12) κατά μέλη θα πάρουμε:

$$\frac{m_2\upsilon_2 =}{I_2\omega_2 =} = \frac{\int F_2 dt}{x\int F_2 dt} = \frac{1}{x} = \frac{4}{\ell} \quad \rightarrow$$

$$m\upsilon_2\ell = 4\frac{1}{12}m\ell^2\omega_2 \rightarrow$$

$$3\upsilon_2 = \ell\omega_2 \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας την ταχύτητα υ_1 από (1) και $\ell\omega_2 = 3\upsilon_2$ (3) στην (2) παίρνουμε:

$$6\upsilon_o^2 = 6(\upsilon_o - \upsilon_2)^2 + 6\upsilon_2^2 + 9\upsilon_2^2 \rightarrow$$

$$21\upsilon_2^2 - 12\upsilon_o\upsilon_2 = 0 \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = 0 \text{ (απορ)}, \ \upsilon_2 = \frac{4}{7}3{,}5m/s = 2m/s\,.$$

Αλλά τότε από την (1) παίρνουμε:

$$\upsilon_1 = \upsilon_o - \upsilon_2 = 1{,}5m/s$$

ενώ από την (2) θα πάρουμε αφού $\omega_1=\omega_2=\omega$:

$$6\upsilon_o^2 = 6\upsilon_1^2 + 6\upsilon_2^2 + \ell^2\omega^2 \rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{6\left(\upsilon_o^2 - \upsilon_1^2 - \upsilon_2^2\right)}{\ell^2}} = \sqrt{6\left(3{,}5^2 - 1{,}5^2 - 2^2\right)}rad/s = 6rad/s$$

dmargaris@gmail.com