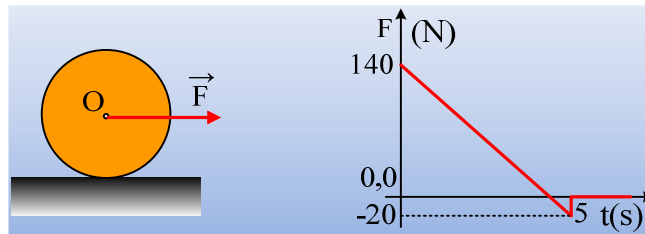


Γενικευμένοι νόμοι και ολίσθηση τροχού.

Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας τροχός μάζας $M=10\text{kg}$ και ακτίνας $=0,5\text{m}$, ο οποίος παρουσιάζει με το επίπεδο συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,4$. Σε μια στιγμή $t=0$ ασκείται στο κέντρο O του τροχού οριζόντια δύναμη F , η τιμή της οποίας μεταβάλλεται όπως στο διάγραμμα.

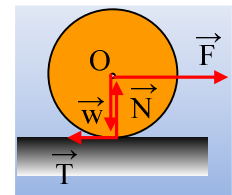


- i) Να αποδειχθεί ότι ο τροχός θα αρχίσει να περιστρέφεται, αλλά και να ολισθαίνει.
- ii) Να βρεθεί η χρονική στιγμή που ο τροχός θα πάψει να ολισθαίνει και πλέον θα κυλιέται.
- iii) Για την χρονική στιγμή $t_1=1\text{s}$ να βρεθούν η ισχύς της δύναμης, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του τροχού, καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της τριβής.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του $I= \frac{1}{2} MR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό. Το ερώτημα είναι τι κίνηση κάνει ο τροχός, ξεκινώντας την κίνησή του; Ας υποθέσουμε ότι ο τροχός κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Τότε με εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, θεωρώντας την κίνηση σύνθετη, έχουμε:



Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x = M a_{cm} \rightarrow F - T = M a_{cm} \quad (1)$

Στροφική κίνηση: $\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T = \frac{1}{2} MR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$

Αλλά αφού ο τροχός κυλιέται $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$ και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$T = \frac{1}{2} M \cdot \alpha_{cm} \quad (3)$$

Με πρόσθεση των (1) και (3) κατά μέλη παίρνουμε:

$$F = \frac{3}{2} M a_{cm} \quad (4)$$

$$a_{cm} = \frac{2F}{3M}$$

Συνεπώς η αρχική τιμή του μέτρου της ασκούμενης τριβής είναι:

$$T_0 = \frac{F_0}{3} \approx 46,7\text{N}$$

Αλλά η μέγιστη τριβή που μπορεί να ασκηθεί στον τροχό, η οριακή στατική τριβή έχει μέτρο:

$$T_{op} = T_{ol} = \mu \cdot N = \mu \cdot Mg = 0,4 \cdot 10 \cdot 10\text{N} = 40\text{N}.$$

Συνεπώς η υπόθεσή μας ότι ο τροχός κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει ήταν λάθος και ο τροχός, στρέφεται μεν, αλλά και ολισθαίνει.

ii) Έστω ότι η ολίσθηση σταματά τη στιγμή t . Από τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, για την μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας του τροχού, έχουμε:

$$\sum \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \rightarrow \Delta p = F \cdot \Delta t - T \cdot \Delta t \rightarrow$$

$$p - 0 = \sum F \cdot \Delta t - T \cdot t$$

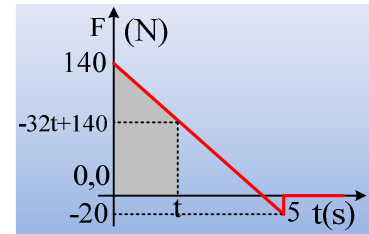
Αλλά το άθροισμα $\sum F \cdot \Delta t$ είναι ίσο με το εμβαδόν του «γκριζαρισμένου» χωρίου στο διάγραμμα.

Μαθηματική παρένθεση:

(Η συνάρτηση της δύναμης, είναι της μορφής $F=at+\beta$, όπου:

Για $t=0$, $F=140\text{N} \rightarrow \beta=140\text{N}$ και για $t=5\text{s}$, $F=-20\text{N} \rightarrow \alpha=-32\text{N/s}$

Οπότε $F = -32t + 140$ (μονάδες στο S.I.)).



Έτσι η παραπάνω σχέση γίνεται: $p - 0 = \sum F \cdot \Delta t - T \cdot t \rightarrow$

$$Mv_{cm} = \frac{140 - 32t + 140}{2} t - 40t \rightarrow$$

$$10v_{cm} = 140t - 16t^2 - 40t \rightarrow$$

$$10v_{cm} = 100t - 16t^2 \quad (5)$$

Εξάλλου από τον αντίστοιχο γενικευμένο νόμο, για την στροφική κίνηση παίρνουμε, για το ίδιο χρονικό διάστημα:

$$\sum \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \rightarrow \Delta L = \sum \tau \cdot \Delta t \rightarrow$$

$$L - 0 = T \cdot R \cdot t \rightarrow \frac{1}{2} MR^2 \cdot \omega = T \cdot R \cdot t \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2} M(R\omega) = T \cdot t \quad (\alpha)$$

Όμως αφού τη στιγμή t ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, $v_{cm} = \omega R$ και η παραπάνω σχέση δίνει:

$$M v_{cm} = 80t \quad \text{ή}$$

$$v_{cm} = 8 \cdot t \quad (6)$$

Από (5) και (6) παίρνουμε:

$$80t = 100t - 16t^2 \rightarrow 16t^2 = 20t \rightarrow t=0 \quad \text{ή} \quad t=1,25\text{s}$$

Προφανώς η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι η δεύτερη λύση, αφού η τιμή $t=0$, αντιστοιχεί στην αρχική θέση, ενώ η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού έχει μέτρο $v_{cm} = 8 \cdot t = 10\text{m/s}$.

iii) Ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη F μεταφέρει ενέργεια στον τροχό (η ισχύς της δύναμης) είναι:

$$\frac{dW}{dt} = F \cdot v_{cm} \rightarrow$$

Αλλά από την σχέση (5) για $t=1\text{s}$ παίρνουμε:

$$v_{cm} = 10t - 1,6t^2 = (10 - 1,6)m/s = 8,4m/s$$

Ενώ $F = -32t + 140 = 108\text{N}$, συνεπώς:

$$P_F = \frac{dW}{dt} = F \cdot v_{cm} = 108 \cdot 8,4W = 907,2W$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του τροχού είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{\mu\epsilon\tau}}{dt} + \frac{dK_{\pi\epsilon\rho}}{dt} \rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = \sum F \cdot v_{cm} + \sum \tau \cdot \omega = (F - T) \cdot v_{cm} + TR \cdot \omega$$

Αλλά από την εξίσωση (α): $\frac{1}{2} M(R\omega) = T \cdot t \rightarrow R\omega = 8m/s$, οπότε με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\frac{dK}{dt} = (F - T) \cdot v_{cm} + TR \cdot \omega = (108 - 40) \cdot 8,4J/s + 40 \cdot 8J/s = 891,2J/s$$

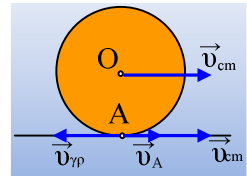
Εξάλλου ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική, είναι κατά απόλυτο τιμή ίση με την ισχύ της τριβής ολίσθησης:

$$\frac{dQ}{dt} = \left| \frac{dW_T}{dt} \right| = T \cdot v_A$$

Ας εστιάσουμε στην ταχύτητα του σημείου επαφής του τροχού με το έδαφος, σημείο A. Το σημείο A έχει μια συνιστώσα ταχύτητας εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης, την v_{cm} και μια συνιστώσα $v_{\gamma\rho}$, λόγω της κυκλικής κίνησης γύρω από O. Αλλά τότε $v_A = v_{cm} - v_{\gamma\rho} = v_{cm} - \omega R = 8,4m/s - 8m/s = 0,4m/s$, οπότε:

$$\frac{dQ}{dt} = T \cdot v_A = 40 \cdot 0,4J/s = 16J/s$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε βέβαια, ότι η ενέργεια διατηρείται, αφού στον τροχό μεταφέρεται μέσω του έργου της δύναμης, ενέργεια με ρυθμό 907,2J/s, από τα οποία 891,2J/s αυξάνουν την κινητική ενέργεια του τροχού, ενώ τα υπόλοιπα 16J/s μετατρέπονται σε θερμική.



dmargaris@sch.gr