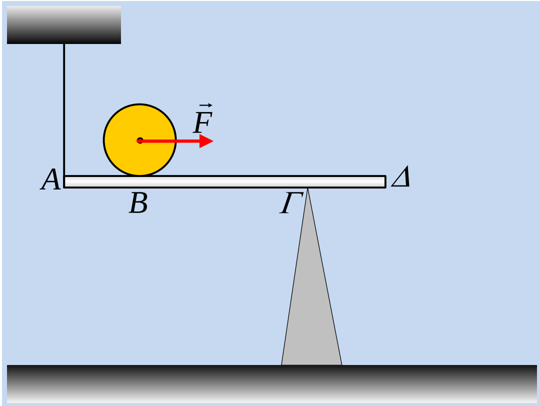
Ένας κύλινδρος πάνω σε μια δοκό.



Η ομογενής δοκός ΑΔ μήκους 4m και μάζας Μ=13kg, ισορροπεί σε οριζόντια θέση, δεμένη στο άκρο κατακόρυφου νήματος στο άκρο της Α, ενώ στηρίζεται σε τρίποδο στο σημείο Γ, όπου (ΓΔ)=1m, ενώ πάνω της ηρεμεί ένας κύλινδρος ακτίνας R=0,25m και μάζας m=10kg, σε σημείο Β, όπου (ΑΒ)=1m.

Σε μια στιγμή t_0=0 ασκούμε στο κέντρο του κυλίνδρου οριζόντια σταθερή δύναμη F, με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να κυλίσει και να εγκαταλείψει τη δοκό από το άκρο της Δ τη χρονική στιγμή t_1=2s, οπότε και παύει να ασκείται η δύναμη F. Στη διάρκεια της παραπάνω κίνησης η δοκός παραμένει ακίνητη.

i) Να υπολογιστεί το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F.

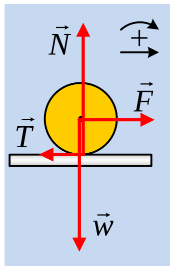
ii) Να βρεθεί ο συνολικός αριθμός των περιστροφών του κυλίνδρου μέχρι τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, αν το ύψος που βρίσκεται η δοκός είναι h=2m.

iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

iv) Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ τριπόδου και δοκού για την ισορροπία της δοκού;

Δίνεται για τον κύλινδρο I= ½ mR^2, ως προς τον άξονα περιστροφής του, ενώ g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, μόλις ασκηθεί πάνω του η οριζόντια δύναμη F, όπου επειδή τα σημεία επαφής του με τη δοκό τείνουν να κινηθούν προς τα δεξιά εμφανίζεται δύναμη τριβής, με φορά προς τα αριστερά. Η τριβή αυτή, από τη στιγμή που μιλάμε για κύλιση, είναι στατική. (Κύλιση εξ ορισμού, είναι η κίνηση στην οποία δεν έχουμε ολίσθηση). Για την σύνθετη κίνηση του κυλίνδρου έχουμε:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x = m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F - T = m\cdot\alpha_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R = \frac{1}{2} mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

Αλλά από τη στιγμή που ο κύλινδρος κυλίεται ισχύει $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ και η εξίσωση (2) γίνεται:

$$T = \tfrac{1}{2}\, m\cdot\alpha_{cm} \quad (2^{\alpha}).$$

Με πρόσθεση των (1) και (2^{α}) παίρνουμε:

$$F = \frac{3}{2} m a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{2F}{3m} \quad (3)$$

Από τη στιγμή που η δύναμη F είναι σταθερή, τότε το κέντρο μάζας του κυλίνδρου αποκτά σταθερή επιτάχυνση εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, για την οποία:

$$\upsilon_{cm}=\alpha_{cm}\cdot t \quad (4) \quad \text{και} \quad x=½\,\alpha_{cm}\cdot t^2 \quad (5)$$

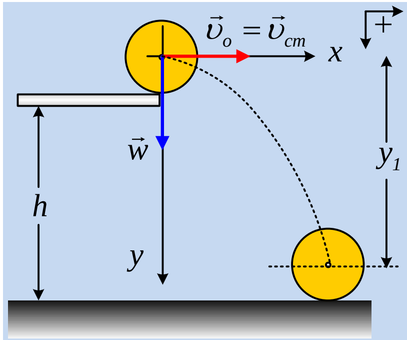
Από την εξίσωση (5) παίρνουμε $a_{cm}=\frac{2x}{t^2}=\frac{2\cdot 3}{2^2}m/s^2=1{,}5m/s^2$.

Και με αντικατάσταση στην (3) $F=\frac{3}{2}ma_{cm}=\frac{3}{2}10\cdot 1{,}5N=22{,}5N$

ii) Για την στροφική κίνηση του κυλίνδρου παίρνουμε $a_{\gamma\omega\nu}=\frac{a_{cm}}{R}=\frac{1{,}5}{0{,}25}rad/s^2=6rad/s^2$, αλλά τότε σε χρονικό διάστημα t_1 έχει περιστραφεί κατά $\Delta\theta_1=\frac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu}t_1^2=\frac{1}{2}6\cdot 2^2 rad=12rad$, έχοντας αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t_1=6\cdot 2rad/s=12rad/s$, τη στιγμή που εγκαταλείπει τη δοκό. Έτσι ο αριθμός των περιστροφών του κυλίνδρου είναι:

$$N_1=\frac{\Delta\theta_1}{2\pi}=\frac{12}{2\pi}=1{,}9$$

Από τη στιγμή που ο κύλινδρος εγκαταλείπει τη δοκό, η μόνη δύναμη που δέχεται είναι το βάρος, οπότε το κέντρο μάζας του θα εκτελέσει οριζόντια βολή, με $\upsilon_0=\upsilon_{1cm}=\alpha_{cm}\cdot t_1=3m/s$, για την οποία ισχύουν:



$$\upsilon_x=\upsilon_{cm} \qquad x=\upsilon_{cm}\cdot t$$

$$\upsilon_y=g\cdot t \quad \text{και} \quad y=½\,g\cdot t^2$$

Αλλά τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος y=(h+R)-R=h και η τελευταία εξίσωση δίνει $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\cdot 2}{10}}s=\frac{2}{\pi}s$.

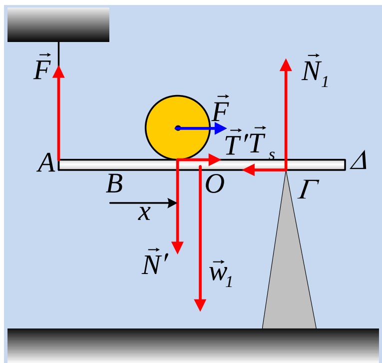
Στη διάρκεια της πτώσης η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή, αφού δεν ασκείται καμιά ροπή στον κύλινδρο, συνεπώς ο αριθμός των περιστροφών που θα εκτελέσει θα είναι:

$$N_2=\frac{t}{T}=\frac{t}{2\pi/\omega}=t\cdot\frac{\omega}{2\pi}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{12}{2\pi}=\frac{12}{\pi^2}=1{,}2$$

Συνεπώς ο συνολικός αριθμός περιστροφών μέχρι ο κύλινδρος να φτάσει στο έδαφος θα είναι:

$N=N_1+N_2=1{,}9+1{,}2=3{,}1$ περιστροφές.

iii) Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό, τη στιγμή που ο κύλινδρος απέχει κατά x από την αρχική του θέση Β, όπου Ν΄ η αντίδραση της δύναμης που ασκείται στον κύλινδρο, όπου N=mg=100N=N΄, Τ΄η αντίδραση της τριβής που ασκείται στον κύλινδρο μέτρου:



$$T'=T=½\,m\cdot\alpha_{cm}\rightarrow$$

$$T'=½\,10\cdot 1{,}5N=7{,}5N.$$

Από την ισορροπία της δοκού έχουμε:

1) $\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow \begin{cases}\Sigma F_x=0 \rightarrow T_s=T'=7{,}5N \\ \Sigma F_y=0 \rightarrow F+N_1=N'+w_1 \text{ (1)}\end{cases}$

2) $\Sigma\tau=0$ (2)

Παίρνοντας τις ροπές ως προς το σημείο Γ και θεωρώντας θετικές τις αριστερόστροφες ροπές η (2) δίνει:

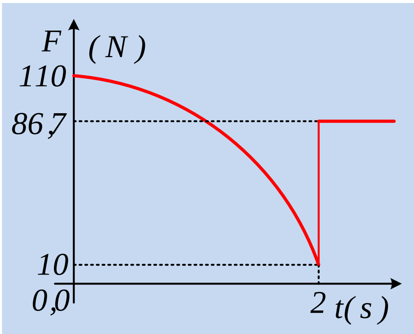
$$-F\cdot(A\Gamma)+N'\cdot(B\Gamma-x)+w_1\cdot(O\Gamma)=0$$

$$-F\cdot 3+100\cdot(2-x)+130\cdot 1=0 \rightarrow$$

$$3F=330-100x \rightarrow$$

$$F=\frac{330}{3}-\frac{100}{3}\frac{1}{2}a_{cm}t^2 \rightarrow$$

$$F=110-25\cdot t^2 \text{ (S.I.) με } t\leq 2s$$



Μόλις ο κύλινδρος εγκαταλείψει τη δοκό, αυτή συνεχίζει να ισορροπεί, οπότε θα έχουμε:

$$\Sigma\tau_\Gamma=0 \rightarrow -F\cdot(A\Gamma)+w_1\cdot(O\Gamma)=0 \rightarrow F=86{,}7N$$

Με βάση αυτά η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι αυτή του διπλανού σχήματος.

iv) Με αντικατάσταση της τιμής της τάσης του νήματος στην σχέση (1) θα έχουμε:

$$N_1=N'+w_1-F=100+130-(110-25t^2) \rightarrow$$

$$N_1=120+25\cdot t^2 \quad \text{(S.I.) } t\leq 2s.$$

Παρατηρούμε ότι καθώς ο κύλινδρος κινείται προς τα δεξιά, η δύναμη στήριξης (κάθετη αντίδραση) που ασκεί το τρίποδο στην δοκό, αυξάνεται.

Για να μην ολισθήσει η δοκός θα πρέπει η δύναμη τριβής που δέχεται να είναι στατική, συνεπώς μικρότερη ή οριακά ίση της οριακής τριβής:

$$T_s\leq\mu_s\cdot N_1 \rightarrow \mu_s\geq\frac{T_s}{N_1}$$

Η μεγαλύτερη τιμή του συντελεστή οριακής στατικής τριβής, θα προκύψει αν στην παραπάνω εξίσωση, αντικαταστήσουμε την ελάχιστη τιμή της N_1, δηλαδή την τιμή της στην αρχική θέση, αφού στη διάρκεια της κίνησης η στατική τριβή παραμένει σταθερή. Να το διατυπώσω διαφορετικά. Η θέση που είναι ευκολότερο να υπάρξει ολίσθηση, είναι η αρχική θέση, αφού κινούμενος ο κύλινδρος, προκαλεί αύξηση της N_1 και εξασφαλίζεται ευκολότερα η μη ολίσθηση.

Αλλά για την αρχική θέση $\mu_s\geq\frac{T_s}{N_1} \rightarrow \mu_s\geq\frac{7{,}5}{120} \rightarrow \mu_s\geq 0{,}0625$.

Συνεπώς η ελάχιστη τιμή του συντελεστή είναι $\mu_{s/min}=0{,}0625$.

dmargaris@sch.gr