

Πόσο έχουμε μάθει να δουλεύουμε τα κύματα;

Μια άσκηση από παλιότερο test.

Έστω δυο σημεία Β και Γ ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, (ας θεωρήσουμε του άξονα $x'x$) κατά μήκος του οποίου διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα της μορφής:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \text{ με } t \geq 0 \text{ και } x \leq \frac{\lambda}{T} t$$

Η οριζόντια απόσταση ΒΓ είναι ίση με $d = 5\lambda/4$, όπου λ το μήκος του κύματος, ενώ το κύμα διαδίδεται από το Β προς το Γ. Κάποια χρονική στιγμή t_0 το κύμα φτάνει στο σημείο Γ, ενώ το σημείο Β βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνσή του.

i) Να σχεδιάσετε τμήμα του στιγμιότυπου του κύματος από το Β μέχρι το Γ τη χρονική στιγμή t_0 .

Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Β είναι:

$$y_B = 0,1\eta\mu(5\pi t - \pi) \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

ii) Να βρεθεί το πλάτος, η συχνότητα του κύματος, όπως επίσης και το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να διαδοθεί το κύμα από το Β στο Γ.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της απομάκρυνσης – χρόνου για το σημείο Γ.

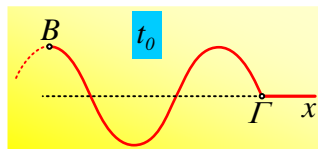
iv) Αν τη χρονική στιγμή $t_1 = t_0 + 0,1s$ το κύμα έχει φτάσει σε ένα σημείο Δ το οποίο απέχει κατά 1m από το Γ (στη διεύθυνση του άξονα) να βρείτε την εξίσωση του κύματος και να κάνετε το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή t_1 κατά μήκος του θετικού ημιάξονα x .

Απάντηση:

i) Η εξίσωση του κύματος που μας δόθηκε:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \text{ με } t \geq 0 \text{ και } x \leq \lambda t/T$$

αντιστοιχεί με κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά και τη στιγμή $t=0$, φτάνει στη θέση $x=0$, ενώ το σημείο που φτάνει το κύμα, ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας του, κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση (εδώ προς τα πάνω). Επομένως τη στιγμή t_0 που το κύμα φτάνει στο Γ η μορφή του μέσου από το Β μέχρι το Γ είναι όπως στο παρακάτω διάγραμμα.



ii) Από την εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Β: $y_B = 0,1\eta\mu(5\pi t - \pi)$ προκύπτει ότι το πλάτος του κύματος είναι $A=0,1m$, ενώ $2\pi f t = 5\pi t$, από όπου $f=2,5Hz$. Εξάλλου από την εξίσωση ορισμού της ταχύτητας του κύματος παίρνουμε:

$$v = \frac{s}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{s}{v} = \frac{d_{BG}}{v} = \frac{5\lambda}{4v} = \frac{5}{4f} = \frac{5}{4 \cdot 2,5} s = 0,5s$$

iii) Το σημείο Γ, καθυστερεί να αρχίσει την ταλάντωσή του, σε σχέση με το σημείο Β κατά χρονικό διάστημα $t_1=0,5s$, οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσής του θα έχει τη μορφή:

$$y_{\Gamma} = 0,1\eta\mu(5\pi(t-t_1) - \pi) = 0,1 \cdot \eta\mu(5\pi(t-0,5) - \pi) = 0,1 \cdot \eta\mu(5\pi t - 3,5\pi) \quad (\text{S.I.}) \quad t \geq 0,7s$$

iv) Σε χρονικό διάστημα $t_1-t_0=0,1s$ το κύμα διαδίδεται κατά απόσταση $1m$ (η απόσταση μεταξύ Γ και Δ), συνεπώς η ταχύτητα του κύματος είναι ίση με:

$$v = \frac{s_{\Gamma\Delta}}{\Delta t} = \frac{1m}{0,1s} = 10m/s$$

Οπότε $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{10}{2,5}m = 4m$ και η εξίσωση του κύματος παίρνει τη μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(2,5t - \frac{x}{4} \right) \quad (\text{S.I.}) \quad \text{με } t \geq 0 \text{ και } x \leq 10t$$

Η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Β και Γ είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_{\Gamma} = 2\pi \left(2,5t - \frac{x_B}{4} \right) - 2\pi \left(2,5t - \frac{x_{\Gamma}}{4} \right) = 2\pi \frac{\Delta x}{4}.$$

Αλλά τη στιγμή t_0 , η φάση του σημείου Γ, το οποίο ξεκινά την ταλάντωσή του, είναι μηδενική, οπότε η φάση του σημείου Β είναι:

$$\varphi_B = 2\pi \frac{\Delta x}{4} = 2\pi \frac{5\lambda}{4} = 2,5\pi \quad (\text{rad}).$$

Οπότε με αντικατάσταση στην εξίσωση για την απομάκρυνση του Β, που μας δόθηκε:

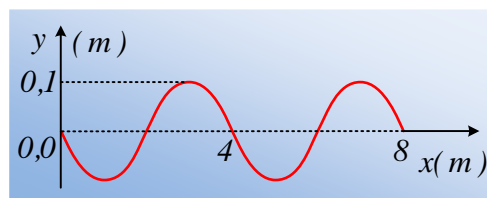
$$y_B = 0,1\eta\mu(5\pi t - \pi) \quad \text{παίρνουμε } \varphi_B = 5\pi t_0 - \pi = 2,5\pi \quad \text{ή } t_0 = 0,7s, \quad \text{άρα } t_1 = t_0 + 0,1s = 0,8s.$$

Με αντικατάσταση τώρα στην εξίσωση του κύματος $t=t_1=0,8s$ παίρνουμε:

$$y = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(2,5t - \frac{x}{4} \right) = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(2,5 \cdot 0,8 - \frac{x}{4} \right) = 0,1 \cdot \eta\mu \left(4\pi - 2\pi \frac{x}{4} \right) \quad \text{ή}$$

$$y = -0,1 \cdot \eta\mu \left(\pi \frac{x}{2} \right) \quad \text{με } x \leq vt \quad \text{ή } x \leq 8m.$$

Με βάση αυτά το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι όπως στο σχήμα:



dmargaris@sch.gr