Μια χορδή σε ταλάντωση ή δυο στάσιμα κύματα.

Μια χορδή μήκους 5m είναι στερεωμένη στα άκρα της Κ και Λ. Όταν εκτρέψουμε το μέσον της Μ, απαιτείται χρονικό διάστημα Δt=0,125s για να φτάσουν τα τρέχοντα κύματα στα άκρα της. Μετά από λίγο δημιουργείται σταθερή κατάσταση πάνω της και η πρώτη κοιλία από τ' αριστερά, παρατηρείται σε ένα σημείο Ο, όπου (ΚΟ)=0,5m. Το πλάτος ταλάντωσης του Ο είναι 0,2m και προκειμένου να γράψουμε εξίσωση για το στάσιμο αυτό, παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων με x=0, τη θέση Ο και $t_0=0$ τη στιγμή που το Ο βρίσκεται σε μέγιστη θετική απομάκρυνση, ενώ έχει ήδη δημιουργηθεί το στάσιμο κύμα.

i) Να βρεθεί η ταχύτητα διάδοσης του τρέχοντος κύματος και η συχνότητα ταλάντωσης της χορδής.

ii) Με βάση τις παραπάνω συμβάσεις, να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται πάνω στη χορδή και να κάνετε το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή t=0.

iii) Δύο σημεία Β και Γ απέχουν από τα άκρα της χορδής Κ και Λ αποστάσεις 0,8m και 1,3m αντίστοιχα. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της φάσης της απομάκρυνσης των παραπάνω σημείων, στους ίδιους άξονες, σε συνάρτηση με το χρόνο.

iv) Ακινητοποιούμε τη χορδή και την θέτουμε ξανά σε ταλάντωση, με τέτοια συχνότητα, ώστε να έχουμε το μεγαλύτερο δυνατόν μήκος κύματος. Στην περίπτωση αυτή, μόλις αποκατασταθεί μόνιμη κατάσταση, το σημείο Ο ταλαντώνεται με πλάτος 0,1m. Να υπολογιστεί η συχνότητα ταλάντωσης καθώς και η μέγιστη κινητική ενέργεια που μπορεί να έχει μια στοιχειώδης μάζα dm=1mg της χορδής.

Δίνεται συν(0,4π)≈0,3.

Απάντηση:

i) Η ταχύτητα διάδοσης του αρχικού κύματος είναι:

$$\upsilon = \frac{s}{\Delta t} = \frac{\ell}{2\Delta t} = \frac{5}{2 \cdot 0{,}125} m/s = 20 m/s \,.$$

Μόλις σχηματισθεί το στάσιμο κύμα πάνω στη χορδή, στα άκρα της θα έχουμε δεσμούς, αφού είναι σταθερά, οπότε η απόσταση (ΚΟ)=0,5m=λ/4, οπότε λ=4·0,5m=2m.

$$\text{Αλλά } \upsilon=\lambda \cdot f \rightarrow \ f = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{20m/s}{2m} = 10Hz$$

ii) Από τη στιγμή που στο σημείο Ο έχουμε δημιουργία κοιλίας, η εξίσωση του στάσιμου θα έχει τη μορφή:

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta\mu\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0\right)$$

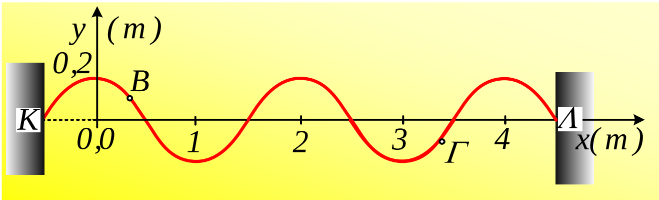
Και για το Ο, στη θέση x=0, y=0,2· $\eta\mu\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0\right)$, όπου για t=0, δίνεται ότι y=+0,2m, οπότε

$$\eta\mu\left(2\pi\frac{0}{T}+\varphi_0\right)=1 \text{ ή } \varphi_0=\frac{\pi}{2}.$$

Και η εξίσωση του στάσιμου κύματος, παίρνει τη μορφή:

$$y=0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\pi x\cdot\eta\mu\left(20\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$ με $t\geq 0$ και $-0{,}5m\leq x\leq 4{,}5m$ (μονάδες στο S.I.)

Και το αντίστοιχο στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος, τη στιγμή t=0, είναι:



iii) Για το σημείο Β, το οποίο βρίσκεται στη θέση x=0,8m-0,5m=0,3m έχουμε:

$$y=0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\pi x\cdot\eta\mu\left(20\pi t+\frac{\pi}{2}\right)=0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu(0{,}3\pi)\cdot\eta\mu\left(20\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$

Η φάση της απομάκρυνσης είναι $\varphi_B=20\pi t+\frac{\pi}{2}$ για $t\geq 0$.

Ενώ για το σημείο Γ, στη θέση x_Γ=4,5m-1,3m =3,2m έχουμε αντίστοιχα:

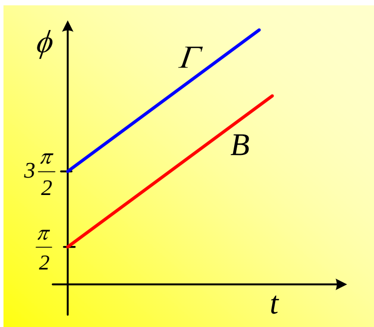
$$y=0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\pi x\cdot\eta\mu\left(20\pi t+\frac{\pi}{2}\right)=0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu(3{,}2\pi)\cdot\eta\mu\left(20\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow$$

$$y=0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu(3\pi+0{,}2\pi)\cdot\eta\mu\left(20\pi t+\frac{\pi}{2}\right)=-0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu(0{,}2\pi)\cdot\eta\mu\left(20\pi t+\frac{\pi}{2}\right) \text{ ή}$$

$$y=0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu(0{,}2\pi)\cdot\eta\mu\left(20\pi t+\frac{\pi}{2}+\pi\right)=0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu(0{,}2\pi)\cdot\eta\mu\left(20\pi t+\frac{3\pi}{2}\right)$$

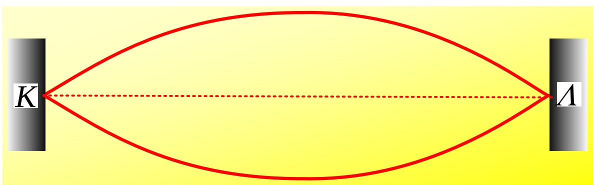
Οπότε η φάση του είναι $\varphi_\Gamma=20\pi t+\frac{3\pi}{2}$ για $t\geq 0$

Οπότε οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις είναι όπως στο διπλανό σχήμα.



Μπορούμε να δούμε ότι **τα δύο σημεία παρουσιάζουν μια σταθερή διαφορά φάση ίση με π (rad)**.

iv) Πάνω στη χορδή δημιουργείται στάσιμο κύμα με το μέγιστο λ, όταν το μήκος της χορδής αντιστοιχεί σε $\lambda_1/2$ και η εικόνα που έχουμε είναι αυτή του παρακάτω σχήματος,

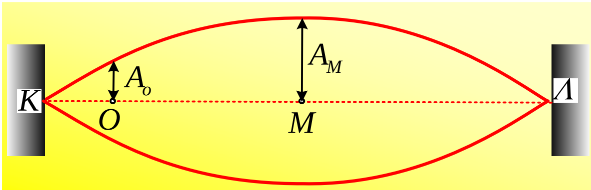


αφού «υποχρεωτικά» στα δυο άκρα θα έχουμε δεσμούς. Οπότε τότε $\ell=\lambda_1/2$ ή λ_1=10m και αφού η ταχύτητα του τρέχοντος κύματος παραμένει σταθερή (δεν άλλαξαν οι ιδιότητες του ελαστικού μέσου), παίρνουμε:

$$\upsilon=\lambda_1 f_1 \rightarrow f_1=\frac{\upsilon}{\lambda_1}=\frac{20}{10}Hz=2Hz$$

Η παραπάνω συχνότητα, είναι η ελάχιστη δυνατή για την οποία σχηματίζεται πάνω στη χορδή στάσιμο κύμα και ονομάζεται θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα της χορδής.

Η στοιχειώδης μάζα που αποκτά μέγιστη κινητική ενέργεια, είναι αυτή που θα αποκτά και μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης, συνεπώς αυτή που βρίσκεται στο μέσον της χορδής, αφού εκεί έχουμε και το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης (κοιλία του στάσιμου). Πόσο είναι αυτό;



Αν πάρουμε τώρα θέση x=0 για το μέσον της χορδής, το πλάτος του στάσιμου κύματος θα δίνεται από την εξίσωση:

$$A=\left|A_M\,\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right|$$

Αλλά αντικαθιστώντας στην εξίσωση αυτή $x=x_O$=-2m (η θέση του σημείου Ο) και A=0,1m παίρνουμε:

$$0{,}1=\left|A_M\,\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{-2}{10}\right)\right| \rightarrow 0{,}1=A_M\cdot\sigma\upsilon\nu(0{,}4\pi)\rightarrow$$

$$A_M=\frac{0{,}1}{\sigma\upsilon\nu(0{,}4\pi)}=\frac{0{,}1}{0{,}3}=\frac{1}{3}m$$

Αλλά τότε η μέγιστη δυνατή κινητική ενέργεια της στοιχειώδους μάζας είναι:

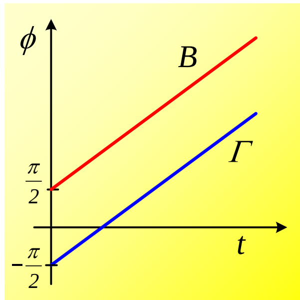
$$K_{max}=\frac{1}{2}dm\cdot\upsilon_{max}^2$$

$$K_{max}=\frac{1}{2}dm(2\pi f_1\cdot A_M)^2=\frac{1}{2}\cdot 10^{-6}\cdot\left(2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{3}\right)^2 J\approx 8{,}8\cdot 10^{-5}J$$

Σχόλιο:

Στο iii) ερώτημα προσπαθώντας να βρούμε τη φάση του σημείου Γ, προσθέσαμε +π, στο όρισμα του ημιτόνου, ώστε να «βγάλουμε» το (-) που μας είχε προκύψει. Θα μπορούσαμε όμως, το ίδιο ορθά από άποψη Τριγωνομετρίας, να αφαιρέσουμε το π, με αποτέλεσμα η εξίσωση να πάρει τη μορφή:

$$\varphi_{\Gamma} = 20\pi t + \frac{\pi}{2} - \pi = 20\pi t - \frac{\pi}{2} \text{ για } t \geq 0$$



Αν το κάνουμε, απλά θα πάρουμε το διπλανό διάγραμμα, όπου και πάλι αυτό που έχει αξία είναι ότι τα δυο σημεία **παρουσιάζουν διαφορά φάσης π**!, αλλά απλά τώρα το σημείο Β, θα έχει μεγαλύτερη φάση.

Για να είμαστε συνεπείς όμως με τον ορισμό της αρχικής φάσης, όπως τον εφαρμόζουμε στις ταλαντώσεις ($0 \leq \varphi_0 < 2\pi$) η «σωστή» αντιμετώπιση είναι η αρχική λύση που δόθηκε, αφού αν εφαρμόσουμε την τελευταία εκδοχή θα έχουμε αρνητική αρχική φάση του σημείου Γ ($\varphi_{o,\Gamma}=-\pi/2$).

dmargaris@sch.gr