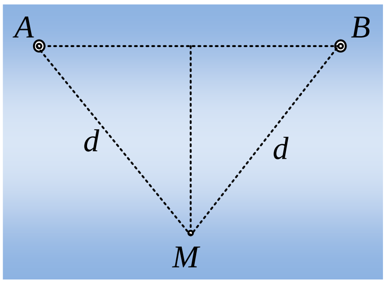
Μια λίγο διαφορετική συμβολή.



Στην επιφάνεια ενός ηρεμούντος υγρού, βρίσκονται δυο πηγές κυμάτων Α και Β, οι οποίες ηρεμούν. Σε μια στιγμή θέτουμε σε κατακόρυφη ταλάντωση την Α πηγή, με συχνότητα f=1Hz, οπότε διαδίδεται στην επιφάνεια του υγρού ένα κύμα, το οποίο μετά από 3s φτάνει σε ένα σημείο Μ, που βρίσκεται στην μεσοκάθετη της απόστασης των δύο πηγών απέχοντας d=1,5m από τις πηγές, το οποίο ξεκινά την ταλάντωσή του κινούμενο με κατεύθυνση προς τα πάνω. Το πλάτος του κύματος μειώνεται καθώς απομακρυνόμαστε από την πηγή και μετρώντας βρήκαμε ότι το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Μ είναι 4mm.

Σταματάμε την Α πηγή και θέτουμε σε παρόμοια ταλάντωση τη Β πηγή, οπότε εξαιτίας του νέου κύματος που δημιουργείται το σημείο Μ ταλαντώνεται με πλάτος 3mm και με συχνότητα 1Hz.

i) Να υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης του πρώτου κύματος και να κάνετε τη γραφική παράσταση της φάσης της απομάκρυνσης του Μ σε συνάρτηση με το χρόνο, όταν ταλαντώνεται μόνο η Α πηγή.

Κάποια στιγμή t_0=0, θέτουμε την Α πηγή σε νέα ταλάντωση και τη στιγμή t_1=1,5s θέτουμε σε ταλάντωση και τη πηγή Β. Και οι δυο πηγές ξεκινούν την ταλάντωσή τους κινούμενες αρχικά με φορά προς τα πάνω.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου Μ, μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων.

iii) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις:

α) της φάσης της απομάκρυνσης του Μ και

β) της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου Μ,

για όλο το χρόνο ταλάντωσής του και μέχρι τη στιγμή t_2=6s

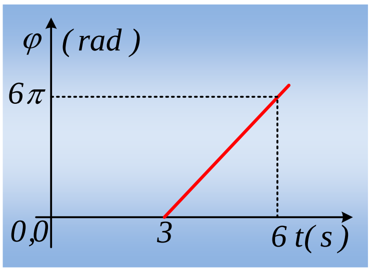
Απάντηση:

i) Το κύμα από την Α πηγή χρειάστηκε χρονικό διάστημα 3s για να φτάσει στο σημείο Μ, οπότε η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$\upsilon = \frac{d}{\Delta t} = \frac{1{,}5m}{3s} = 0{,}5m/s$$

Αλλά υ=λ·f οπότε το μήκος του κύματος είναι $\lambda = \frac{\upsilon}{f} = 0{,}5m$.

Η πηγή Α ξεκινά την κίνησή της κινούμενη προς την θετική κατεύθυνση, συνεπώς χωρίς αρχική φάση και η εξίσωση της απομάκρυνσής έχει τη μορφή $y_A = A\cdot\eta\mu 2\pi ft$, όπου Α το πλάτος ταλάντωσής της. Το πλάτος αυτό δεν το γνωρίζουμε και είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο πλάτος του σημείου Μ, αφού όταν απομακρυνόμαστε από την πηγή το πλάτος μειώνεται, αφού συνεχώς και αυξάνεται το μέτωπο του κύματος. Την ίδια λοιπόν ταλάντωση θα εκτελέσει και κάθε σημείο κατά τη διάδοση του κύματος, με το δικό του πλάτος, απλά με μια χρονική καθυστέρηση, που οφείλεται στο χρόνο που χρειάζεται το κύμα για να φτάσει σε αυτό. Συνεπώς η εξίσωση του κύματος θα είναι της μορφής:



$$y_1 = A_1 \cdot \eta\mu\omega(t - t_1) = A_1 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right) = A_1 \cdot \eta\mu 2\pi(t - 2r)$$

Οπότε για το σημείο Μ θα έχουμε:

$y_{1M} = 4 \cdot \eta\mu 2\pi(t-3)$ το y σε mm και $t \geq 3s$.

Έτσι η γραφική παράσταση της φάσης της απομάκρυνσης του σημείου Μ είναι όπως στο διπλανό σχήμα.

ii) Το πρώτο κύμα θα φτάσει στο Μ τη στιγμή t_2=3s, ενώ το δεύτερο κύμα τη στιγμή t_3=4,5s. Τα δύο κύματα συμβάλουν και η απομάκρυνση του Μ, για κάθε στιγμή $t \geq 4{,}5s$ με βάση την αρχή της επαλληλίας θα είναι:

$$y = y_1 + y_2$$

Όπου οι αντίστοιχες απομακρύνσεις εξαιτίας της ταλάντωσης που θα οφείλεται σε κάθε κύμα.

Αλλά για την ταλάντωση εξαιτίας του πρώτου κύματος έχουμε:

$y_{1M} = 4 \cdot \eta\mu 2\pi(t-3) = 4 \cdot \eta\mu(2\pi t - 6\pi)$ το y σε (mm) για $t \geq 4{,}5s$

Εξάλλου για την εξίσωση του δεύτερου κύματος θα έχουμε:

$$y_2 = A_2 \cdot \eta\mu\omega(t - t_1 - t_2) = A_2 \cdot \eta\mu 2\pi\left((t - t_1) - \frac{r}{\upsilon}\right) = 3 \cdot \eta\mu 2\pi\big((t - 1{,}5) - 2r\big) \rightarrow$$

$$y_{2M} = 3 \cdot \eta\mu 2\pi\big((t-1{,}5) - 3\big) = 3 \cdot \eta\mu\big(2\pi(t-1{,}5) - 6\pi\big) \rightarrow$$

$y_{2M} = 3 \cdot \eta\mu(2\pi t - 9\pi)$ το y σε mm και $t \geq 4{,}5s$.

Έχουμε λοιπόν σύνθεση δύο ταλαντώσεων με την ίδια συχνότητα οι οποίες παρουσιάζουν διαφορά φάσεως, $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2=2\pi t-6\pi-2\pi t+9\pi=3\pi$ rad= $(2\pi+\pi)$ rad = π rad, με την ταλάντωση εξαιτίας του πρώτου κύματος να εμφανίζει την μεγαλύτερη φάση.

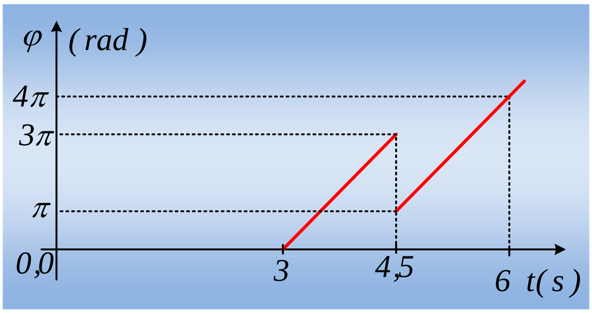
Οπότε το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι $A=|A_1-A_2|$= 1mm ενώ η φάση θα είναι ίση με τη φάση της ταλάντωσης με το μεγαλύτερο πλάτος, λαμβάνοντας δε υπόψη ότι, για την αρχική φάση μιας ταλάντωσης έχουμε ορίσει τον περιορισμό $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$, τότε η εξίσωση ταλάντωσης του Μ γίνεται:

$y=1 \cdot \eta\mu(2\pi(t-4{,}5)+\pi)$ το y σε mm και για $t \geq 4{,}5s$.

iii) α) Με βάση τα παραπάνω για την φάση του σημείου Μ έχουμε:

$$\varphi = \begin{cases} \text{Δεν ορίζεται} & \text{για } t \leq 3s \\ 2\pi t - 6\pi \ \text{(rad)} & \text{για } 3s \leq t < 4{,}5s \\ 2\pi t - 8\pi \ \text{(rad)} & \text{για } t \geq 4{,}5s \end{cases}$$

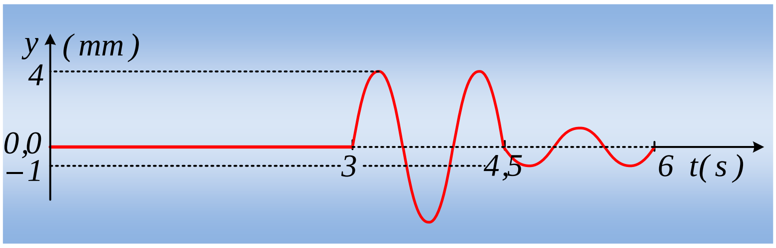
Και η ζητούμενη γραφική παράσταση:



β) Αντίστοιχα για την απομάκρυνση του σημείου Μ έχουμε:

$$y=\begin{cases} 0 & \text{για } t \le 3s \\ 4\cdot \eta\mu 2\pi(t-3) & \text{για } 3s \le t < 4{,}5s \\ 1\cdot \eta\mu(2\pi(t-4{,}5)+\pi) & \text{για } t \ge 4{,}5s \end{cases}$$

Με γραφική παράσταση:



Σχόλια:

1) Στο i) ερώτημα για τη φάση της απομάκρυνσης του Μ εξαιτίας του πρώτου κύματος, η φάση ξεκινά από την τιμή μηδέν (τη στιγμή που φτάνει το κύμα t_1=3s) και αυξάνεται, οπότε τη στιγμή t_2=6s παίρνει την τιμή 6π (rad). Στην περίπτωση όμως της συμβολής των δύο κυμάτων, τη στιγμή t_3=4,5s, έχουμε τη δημιουργία μιας **νέας** ταλάντωσης όπου η φάση της τη στιγμή αυτή πρέπει να έχει τιμή μεταξύ 0 και 2π (σαν να λέμε ο μετρητής της φάσης μηδενίζεται…), οπότε στο ερώτημα iiia) η φάση ενώ έχει φτάσει στην τιμή 3π, πέφτει ξαφνικά στην τιμή π (rad).

2) Τη στιγμή t_3=4,5s, που συμβάλουν τα δύο κύματα, το σημείο Μ εξαιτίας του πρώτου κύματος θα έχει ταχύτητα $\upsilon_1=\omega\cdot A_1\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi t-6\pi)=\omega\cdot A_1\cdot\sigma\upsilon\nu(9\pi-6\pi)=-\omega\cdot A_1=-8\pi\cdot 10^{-3}$m/s, ενώ η αντίστοιχη ταχύτητα εξαιτίας του δεύτερου κύματος είναι $\upsilon_2=\omega\cdot A_2\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi t-9\pi)=\omega\cdot A_2\cdot\sigma\upsilon\nu(9\pi-9\pi)=\omega\cdot A_2=6\pi\cdot 10^{-3}$m/s. Συνεπώς το σημείο Μ θα ξεκινήσει την ταλάντωσή του, από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση. Συνεπώς η αρχική φάση της απομάκρυνσης για την νέα ταλάντωση που «θα γεννηθεί» είναι ίση με π (rad).

dmargaris@sch.gr