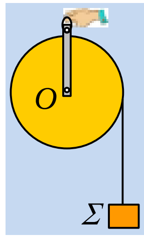
Μια κινούμενη τροχαλία.

Γύρω από μια τροχαλία μάζας M=0,8kg έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου έχουμε δέσει ένα σώμα Σ μάζας m=0,1kg. Συγκρατούμε τα δυο σώματα με τα χέρια μας, ώστε το νήμα να είναι τεντωμένο (χωρίς να ασκεί δυνάμεις στα σώματα) και σε μια στιγμή $t_0=0$, αφήνουμε το σώμα Σ να κινηθεί, ενώ συγκρατούμε σταθερή την τροχαλία. Τη στιγμή $t_1=1s$ αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης στην τιμή $F_2=11N$, μέχρι τη στιγμή t_2 που η τροχαλία αποκτά ταχύτητα $υ_2=1m/s$.



i) Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης την οποία ασκούσαμε στην τροχαλία από 0-t_1.

ii) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_2.

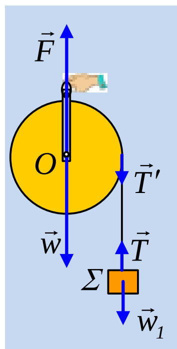
iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας του σώματος Σ σε συνάρτηση με το χρόνο από 0-t_2.

iv) Ποιες ενεργειακές μεταβολές εμφανίζονται στο χρονικό διάστημα $Δt=t_2-t_1$; Πώς συνδέονται οι μεταβολές αυτές με τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται στα σώματα;

Για την τροχαλία ως προς τον άξονα περιστροφής της $I= ½ MR^2$, ενώ $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

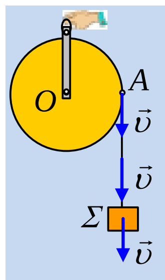
i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, όπου αφού το νήμα είναι αβαρές Τ΄=Τ και $\vec{F}$ η δύναμη που ασκούμε στον άξονα της τροχαλίας. Από 0-t_1 συγκρατούμε την τροχαλία, το νήμα ξετυλίγεται και το σώμα Σ κατέρχεται. Παίρνοντας το 2° νόμο του Νεύτωνα θα έχουμε:



Σώμα Σ: $ΣF=m·α \rightarrow mg-T=m·α$ (1)

Τροχαλία: $Στ=I·α_{γων} \rightarrow T΄·R= ½ MR^2·α_{γων} \rightarrow T= ½ MRα_{γων}$ (2)

Αλλά το σώμα Σ έχει κάθε στιγμή την ίδια ταχύτητα με κάθε σημείο του νήματος, συνεπώς και με το σημείο Α του νήματος το οποίο έρχεται σε επαφή με την τροχαλία:



$$υ_Σ = υ_{γρ} = ωR \rightarrow a = \frac{dυ_Σ}{dt} = \frac{dω}{dt}R = a_{γων}R \quad (3)$$

Οπότε με πρόσθεση των (1) και (2) λαμβάνοντας υπόψη μας και την σχέση (3), παίρνουμε:

$$a = \frac{mg}{m+{}^1\!/\!_2 M} = \frac{0{,}1\cdot 10}{0{,}1+0{,}4} m/s^2 = 2m/s^2$$

Αλλά τότε από την ισορροπία της τροχαλίας, όσον αφορά τη μεταφορική της κίνηση, θα έχουμε:

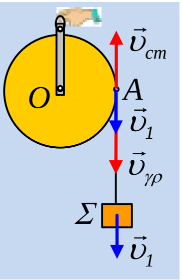
$$F=w+T΄=Mg+ ½ M·α=0{,}8·10N+ ½ ·0{,}8·2N=8{,}8N$$

ii) Μόλις αυξήσουμε το μέτρο της ασκούμενης κατακόρυφης δύναμης F, η τροχαλία θα επιταχυνθεί προς τα πάνω και έστω ότι το σώμα Σ συνεχίζει να επιταχύνεται προς τα κάτω. Δουλεύοντας με τα μέτρα των μεγεθών, θα έχουμε:

Τροχαλία: Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_y=M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F\text{-}Mg\text{-}T'=M\cdot\alpha_{cm}$ (4)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T'\cdot R=\frac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T'=\frac{1}{2}MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (5)

Σώμα Σ: $\Sigma F=m\cdot\alpha_1 \rightarrow mg\text{-}T=m\cdot\alpha_1$ (6)



Ας έρθουμε τώρα στο σημείο Α, όπου το νήμα εφάπτεται της τροχαλίας. Το σημείο αυτό, σαν σημείο της περιφέρειας της τροχαλίας έχει μια συνιστώσα ταχύτητα ίση με υ_{cm} και μια $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R$, όπως στο σχήμα, οπότε η συνολική ταχύτητα, ίση με την ταχύτητα υ_1 του σώματος Σ, θα είναι:

$$\upsilon_1=\upsilon_{\gamma\rho}-\upsilon_{cm} \rightarrow \upsilon_1=\omega R-\upsilon_{cm} \rightarrow$$

$$\alpha_1=\frac{d\upsilon_1}{dt}=\frac{d\omega}{dt}R-\frac{d\upsilon_{cm}}{dt}=a_{\gamma\omega\nu}R-a_{cm} \quad (7)$$

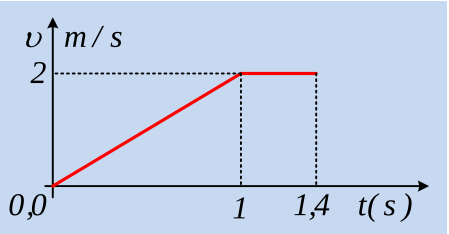
Οπότε η (5) γίνεται $T'=\frac{1}{2}MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $2\cdot T=M\alpha_1+M\alpha_{cm}$ και με αντικατάσταση στις σχέσεις (4) και (6) παίρνουμε:

$$\left.\begin{aligned}&1{,}5M\alpha_{cm}+0{,}5m\alpha_1=F-Mg\\&0{,}5M\alpha_{cm}+(m+0{,}5M)\alpha_1=mg\end{aligned}\right\} \quad \alpha_1=0 \;\; \text{και}\;\; \alpha_{cm}=2{,}5m/s^2$$

Αλλά τότε για την κίνηση του κέντρου μάζας της τροχαλίας έχουμε:

$$\upsilon_2=\alpha_{cm}\cdot\Delta t \rightarrow t_2-t_1=\frac{\upsilon_2}{a_{cm}}=\frac{1}{2{,}5}s=0{,}4s \rightarrow t_2=1{,}4s$$

iii) Το σώμα Σ, από 0-1s κινείται με σταθερή επιτάχυνση, οπότε αποκτά ταχύτητα $\upsilon_1=\alpha\cdot t_1=2\cdot 1m/s=2m/s$, ενώ στη συνέχεια κινείται με σταθερή ταχύτητα και η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



iv) Στο χρονικό διάστημα από 1s έως 1,4s, η τροχαλία ανέρχεται κατά:

$$y=\frac{1}{2}\alpha_{cm}\cdot(\Delta t)^2=\frac{1}{2}\cdot 2{,}5\cdot 0{,}4^2 m=0{,}2m.$$

Αλλά τότε έχει αυξηθεί η δυναμική της ενέργεια κατά:

$$\Delta U_{\tau\rho}=Mg\cdot y=0{,}8\cdot 10\cdot 0{,}2J=1{,}6J.$$

Ταυτόχρονα έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα $\omega=\omega_1+\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\Delta t$, όπου $\omega_1=\frac{\upsilon_1}{R}$ ενώ λόγω της σχέσης (7) $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\alpha_{cm}/R$, οπότε παίρνουμε $\omega=\frac{\upsilon_1}{R}+\frac{a_{cm}}{R}(t_2-t_1)=\frac{2}{R}+\frac{2{,}5\cdot 0{,}4}{R}=\frac{3}{R}$ (S.I.)

Συνεπώς έχει αποκτήσει και κινητική ενέργεια:

$$K=\frac{1}{2}M\upsilon_2^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}M\upsilon_2^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2 \rightarrow$$

$$K=\frac{1}{2}0{,}8\cdot 1^2\,J+\frac{1}{4}0{,}8R^2\cdot\left(\frac{3}{R}\right)^2 J=0{,}4J+1{,}8J=2{,}2J$$

Ενώ τη στιγμή t_1 είχε κινητική ενέργεια:

$$K_{t1}=\frac{1}{2}I\omega_1^2=\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega_1^2=\frac{1}{4}MR^2\left(\frac{\upsilon_1}{R}\right)^2=\frac{1}{4}M\upsilon_1^2=\frac{1}{4}0{,}8\cdot 2^2\,J=0{,}8J$$

Έχουμε δηλαδή **αύξηση** της μηχανικής ενέργειας της τροχαλίας κατά:

$$\Delta E_{\tau\rho}=\Delta U+\Delta K=1{,}6J+(2{,}2J-0{,}8J)=3J.$$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα το σώμα Σ κατεβαίνει κατά $y_1=\upsilon_1\cdot\Delta t=2\cdot 0{,}4m=0{,}8m$.

Αλλά τότε η δυναμική του ενέργεια **μειώνεται** κατά $\Delta U_1=mgy_1=0{,}1\cdot 10\cdot 0{,}8J=0{,}8J$, ενώ η κινητική του ενέργεια παρέμεινε σταθερή, αφού κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Αν θέλουμε να μιλήσουμε για το σύστημα, προφανώς έχουμε αύξηση της μηχανικής του ενέργειας κατά:

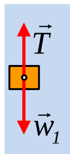
$$\Delta E_{o\lambda}=\Delta E_{\tau\rho}+\Delta E_{\Sigma}=+3J-0{,}8J=2{,}2J.$$

Τα βάρη των σωμάτων είναι δυνάμεις τα έργα των οποίων εκφράζουν την ενέργεια η οποία μετατρέπεται από δυναμική σε κινητική και αντίστροφα. Το έργο επίσης της τάσης του νήματος, εσωτερική δύναμη, μετράει την ενέργεια που μεταφέρεται από το ένα σώμα στο άλλο. Έτσι η μόνη δύναμη που μπορεί να μεταβάλλει την μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι η ασκούμενη δύναμη F.

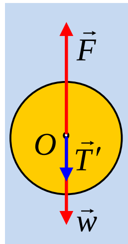
Πράγματι:

$$W_F=F\cdot y=11\cdot 0{,}2J=2{,}2\ J=\Delta E_{o\lambda}.$$

Ας δούμε τώρα λίγο αναλυτικότερα το τι συμβαίνει, με τη βοήθεια των έργων.



Κατά την κίνηση του σώματος Σ, η δυναμική του ενέργεια μειώνεται κατά 0,8J αφού το βάρος παράγει έργο $W_{w1}=+mgy_1=+\ 0{,}1\cdot 10\cdot 0{,}8\ J=\ 0{,}8J$. Αλλά πάνω του ασκείται και η τάση του νήματος το έργο της οποίας είναι $W_T=-T\cdot y_1=-0{,}8J$, πράγμα που σημαίνει ότι αφαιρείται ενέργεια 0,8J από το σώμα η οποία μεταφέρεται μέσω του νήματος στην τροχαλία.



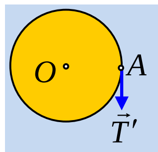
Για την μεταφορική κίνηση της τροχαλίας έχουμε:

$$W_F=F\cdot y=11\cdot 0{,}2J=2{,}2\ J,\ W_{T'}=-T\cdot y=-mg\cdot y=-0{,}1\cdot 10\cdot 0{,}2J=-0{,}2J\ \text{και}$$

$$W_w=-Mgy=-0{,}8\cdot 10\cdot 0{,}2J=-1{,}6J$$

Συνεπώς η μεταφορική κινητική της ενέργεια μεταβάλλεται κατά:

$$\Delta K=K_{\mu\varepsilon\tau}=W_F+W_{T'}+W_w=2{,}2J-0{,}2J-1{,}6J=0{,}4J.$$



Κατά την περιστροφική κίνηση της τροχαλίας αυτή διαγράφει γωνία:

$$\theta=\omega_1\cdot(\Delta t)+\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}(\Delta t)^2=\frac{\upsilon_1}{R}\cdot(\Delta t)+\frac{1}{2}\frac{a_{cm}}{R}(\Delta t)^2$$

Οπότε το αντίστοιχο έργο της ροπής που ευθύνεται για την περιστροφή είναι:

$$W_{\tau}=\tau\cdot\theta=T'R\cdot\theta=mgR\cdot\left(\frac{\upsilon_1}{R}\cdot(\Delta t)+\frac{1}{2}\frac{a_{cm}}{R}(\Delta t)^2\right)=mg\upsilon_1(\Delta t)+\frac{1}{2}a_{cm}(\Delta t)^2\rightarrow$$

$$W_{\tau}=mg\upsilon_1(\Delta t)+mg\frac{1}{2}a_{cm}(\Delta t)^2=0{,}1\cdot 10\cdot 2\cdot 0{,}4J+\frac{1}{2}2{,}5\cdot 0{,}4^2\,J=1J$$

Ίσο με την αύξηση της κινητικής περιστροφικής ενέργειας της τροχαλίας, αφού:

$$\Delta K_{\pi\varepsilon\rho}=K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega_2^2-\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega_1^2\rightarrow$$

$$\Delta K_{\pi\varepsilon\rho}=1{,}8J-0{,}8J=1J.$$

Πόσο είναι το έργο της τάσης του νήματος; Το έργο της τάσης Τ, η οποία ασκείται στο σώμα Σ υπολογίστηκε ίσο με -0,8J, πράγμα που σημαίνει ότι μέσω του νήματος μεταφέρεται ενέργεια 0,8J στην τροχαλία. Ναι, αλλά πώς γίνεται η περιστροφική κινητική ενέργεια να αυξήθηκε κατά 1J και όχι κατά 0,8J; Όταν μελετήσαμε τη μεταφορική κινητική ενέργεια είχαμε βρει ότι $W_{T'}$=-0,2J, πράγμα που σημαίνει ότι «αφαιρέθηκαν» 0,2J μεταφορικής κινητικής ενέργειας από την τροχαλία, τα οποία προστιθέμενα στα 0,8J της ενέργειας που μεταφέρονται από το σώμα Σ, μας δίνουν τη συνολική περιστροφική κινητική ενέργεια της τροχαλίας.

dmargaris@sch.gr