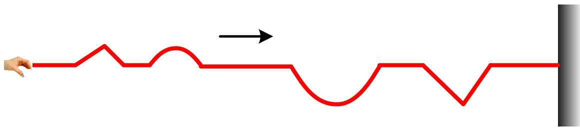
Μια εναλλακτική θεμελίωση των κυμάτων…

Τα κύματα δεν είναι η συνέχεια των ταλαντώσεων, όπως για διδακτικούς λόγους κάνουμε…

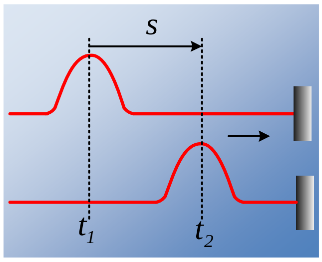
1. Η διάδοση ενός παλμού.

Έστω ότι έχουμε ένα ελαστικό μέσο, π.χ. μια τεντωμένη οριζόντια χορδή. Εκτρέποντας το αριστερό άκρο της για ένα μικρό χρονικό διάστημα κατακόρυφα, μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν παλμό, ο οποίος μπορούμε να τον δούμε να διαδίδεται κατά μήκος της χορδής. Τέτοιοι παλμοί φαίνονται στο παρακάτω σχήμα να διαδίδονται προς τα δεξιά πάνω στην χορδή.



Οι παλμοί αυτοί μπορούν να έχουν διάφορες μορφές, όπως π.χ. τριγωνικοί ή και αρμονικοί.

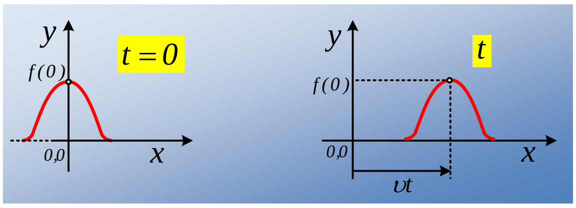
Ας πάρουμε τώρα ένα παλμό όπως στο διπλανό σχήμα, ο οποίος διαδίδεται προς τα δεξιά και στο σχήμα δίνονται δύο θέσεις του που διαφέρουν χρονικά κατά $\Delta t = t_2 - t_1$. Ορίζουμε την ταχύτητα διάδοσης του παλμού:



$$\upsilon = \frac{s}{\Delta t}$$

Και αν θέλουμε να δώσουμε μια μαθηματική συνάρτηση για την διάδοση του παλμού αυτού; Αν θέλουμε δηλαδή μια κυματοσυνάρτηση για να περιγράψουμε τόσο τη μορφή του παλμού, όσο και τη θέση του κάποια στιγμή, τι κάνουμε;

Υποθέτοντας ότι ο παλμός μεταφέρεται χωρίς αλλαγή μορφής, θα πρέπει η μορφή της χορδής να υπακούει στην ίδια συνάρτηση, απλά η εικόνα να έχει μετατοπισθεί. Παίρνουμε λοιπόν ένα σύστημα αξόνων και θεωρούμε ότι η αρχική θέση του παλμού, είναι στη θέση x=0 (όπως στο σχήμα, όπου το x=0 αντιστοιχεί στο μέγιστο του παλμού. Προφανώς θα μπορούσαμε να πάρουμε σε άλλη θέση το x=0) και ότι σε αυτή τη θέση βρίσκεται ο παλμός τη στιγμή $t_0=0$. Τότε η αρχική εικόνα περιγράφεται από μια συνάρτηση:



$$y=f(x) \text{ τη στιγμή } t=0$$

Σε κάθε επόμενη χρονική στιγμή ο παλμός θα έχει μετακινηθεί κατά μια απόσταση $x=\upsilon\cdot t$ και το μέγιστο του παλμού, θα έχει επίσης μετατοπισθεί από τη θέση x=0, στη θέση $x=\upsilon\cdot t$. Η αρχική συνάρτηση y=f(x), θα πρέπει τώρα να γραφεί με τη μορφή

$$y=f(x-\upsilon\cdot t) \quad \text{όπου } t \geq 0$$

Αν τώρα η μορφή του παραπάνω παλμού τη στιγμή t_0=0, **μπορεί να περιγραφεί κατά μεγάλη προσέγγιση,** με μια συνάρτηση της μορφής

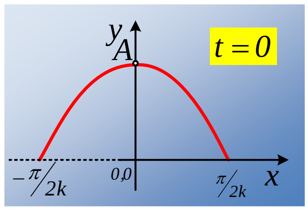
$$y=f(x)=A\cdot συν(kx) \quad \text{τη στιγμή } t=0$$

τότε σε κάθε μεταγενέστερη στιγμή η αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση θα έχει τη μορφή:

$$y=f(x-υt)=A\cdot συνk(x-υt) \quad με \quad t\geq 0 \quad ή$$

$$y=A\cdot συν(kυt-kx) \quad με \quad t\geq 0$$

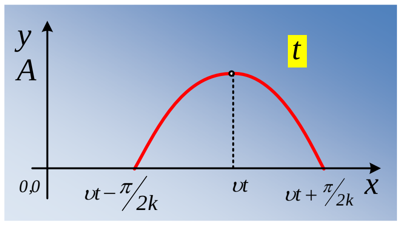
Αλλά ας επιστρέψουμε στο σχήμα τη στιγμή t=0, όπου τώρα «βλέπουμε» τη μορφή ενός συνημιτόνου, το οποίο μηδενίζεται στις θέσεις:



$$x=\pm\frac{\pi}{2k},$$

αφού

$$y=A\cdot συν(kx)=A\cdot συν\left(\pm k\frac{\pi}{2k}\right)=A\cdot συν\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=0$$

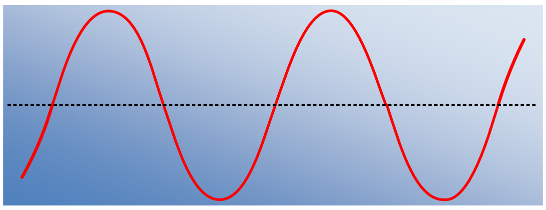


έτσι τη στιγμή t, ο παλμός βρίσκεται στην περιοχή:

$$υt-\frac{\pi}{2k}\leq υt\leq υt+\frac{\pi}{2k}$$

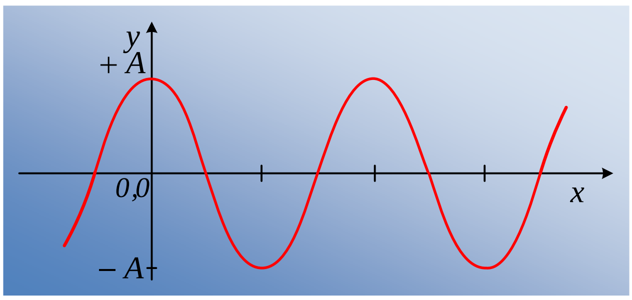
2. Η διάδοση ενός κύματος.

Ας πάρουμε τώρα το άκρο της χορδής, να μην εκτελεί μόνο μισή ταλάντωση, αλλά έστω ότι κινείται διαρκώς και εμείς βλέπουμε μια περιοχή της χορδής η οποία είναι παραμορφωμένη όπως στο σχήμα:



όπου η μορφή της καμπύλης είναι **αρμονική**.

Θέλουμε να δώσουμε μια μαθηματική περιγραφή για το κύμα που διαδίδεται. Επιλέγουμε ένα σύστημα αξόνων, θέτοντας αυθαίρετα σε κάποιο σημείο την αρχή των αξόνων.

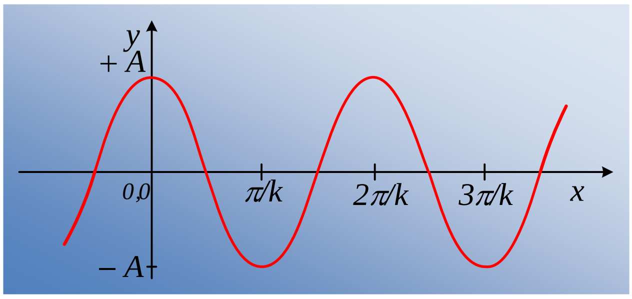


Κατά τον αρχικό χρόνο t=0 η κυματοσυνάρτηση είναι της μορφή:

$$y=A\cdot\sigma\upsilon\nu(kx)$$

Η σταθερά Α που αντιπροσωπεύει το ύψος της κορυφής του κύματος (ή το βάθος του κοιλώματος) ονομάζεται πλάτος του κύματος και η σταθερά k ονομάζεται **κυματικός αριθμός**.

Το παρακάτω σχήμα δίνει το γράφημα της παραπάνω κυματοσυνάρτησης. Οι κορυφές κύματος (μέγιστα) συμβαίνουν στις θέσεις:



$$kx= 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi \dots$$

και τα κοιλώματα κύματος (ελάχιστα) στις

$$kx=\pi, 3\pi, 5\pi \dots\dots$$

Από αυτές τις εξισώσεις βλέπουμε ότι η απόσταση από τη μια κορυφή ως την επόμενη, ή από το ένα κοίλωμα ως το επόμενο είναι $\frac{2\pi}{k}$. Αυτήν την απόσταση ονομάζουμε **μήκος του κύματος**:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Σε οποιοδήποτε μεταγενέστερο χρόνο, το αρμονικό κύμα θα έχει προχωρήσει κάποια απόσταση προς τα δεξιά ή προς τ’ αριστερά. Η αρχική κυματοσυνάρτηση πρέπει ν’ αντικατασταθεί με μια νέα, μετατοπισμένη κυματοσυνάρτηση

$$y=A\cdot\sigma\upsilon\nu k(x\text{-}\upsilon t)$$

(για κύμα προς τα δεξιά και όμοια με + για κύμα που οδεύει προς την αρνητική φορά του x)

Για αρμονικό κύμα, συνηθίζεται να χρησιμοποιούμε την κυκλική συχνότητα

$$\omega=k\upsilon=\frac{2\pi}{\lambda}\upsilon = 2\pi\ f$$

Συναρτήσει του μήκους κύματος και της συχνότητας η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$y=A\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{\lambda}-2\pi ft\right) \text{ ή}$$

$$y=A\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{t}{T}-2\pi\frac{x}{\lambda}\right) \text{ ή και}$$

$$y = A \cdot \eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

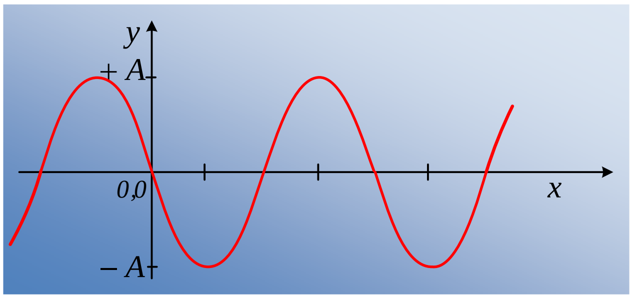
Στην εξίσωση (1) η ποσότητα $\varphi = \left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right)$ ονομάζεται φάση του κύματος, ενώ αν θέσουμε x=0 και t=0 παίρνουμε $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (rad) η οποία εκφράζει τη φάση του σημείου στη θέση που εμείς πήραμε ως αρχή του άξονα (x=0), τη χρονική στιγμή t=0.

Σημειωτέον ότι ένα δοσμένο σωματίδιο της χορδής, σε κάποια δεδομένη θέση x_0, έχει εγκάρσια απομάκρυνση

$$y = A \cdot \eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x_0}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) = A \cdot \eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T} + \phi_0\right) \quad \text{όπου } 2\pi\frac{t}{T} + \phi_0 > 0$$

εξίσωση που μας **υπενθυμίζει** ότι το δεδομένο σωματίδιο εκτελεί αρμονική ταλάντωση με πλάτος Α και κυκλική συχνότητα ω.

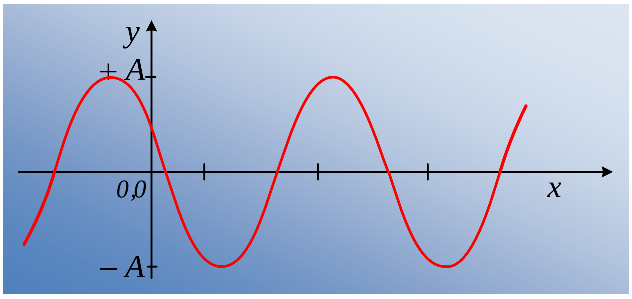
Αξίζει βέβαια να τονισθεί στο σημείο αυτό, ότι θα μπορούσαμε να πάρουμε τον άξονα, όπως στο παρακάτω σχήμα.



Αλλά τότε η εξίσωση (1) θα έπαιρνε τη μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$$

Αλλά και γιατί όχι, να παίρναμε τους άξονες όπως παρακάτω:



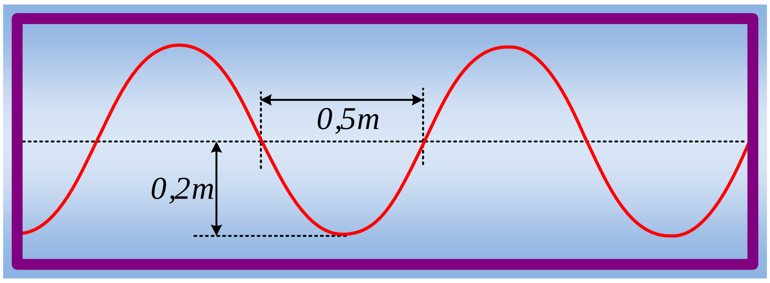
Οπότε θα είχαμε

$$y = A \cdot \eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda} + \varphi_0\right)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι στην περίπτωση αυτή, αυτό που συνήθως ονομάζουμε **αρχική φάση κύματος**, δεν έχει καμιά φυσική αξία, αφού είναι μια ποσότητα που η τιμή της εξαρτάται **μόνο και μόνο** από τη θέση του άξονα!!

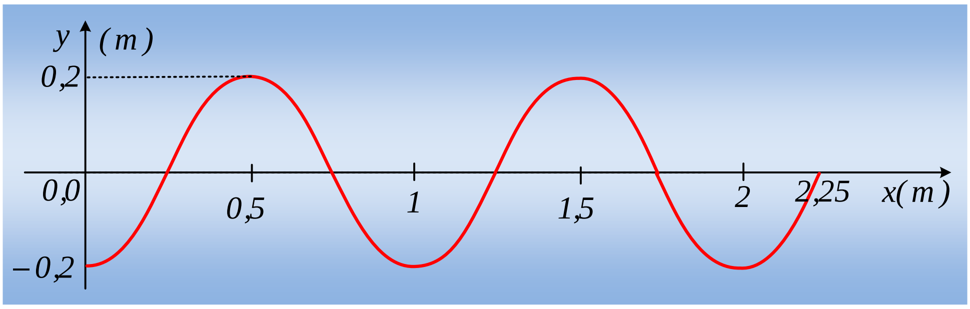
Παράδειγμα.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο ενός αρμονικού κύματος που διαδίδεται προς την θετική φορά (προς τα δεξιά), με περίοδο 2s, τη στιγμή $t_0=0$. Η πηγή του κύματος βρίσκεται αριστερά του παραθύρου και συνεχίζει να ταλαντώνεται. Να σχεδιάστε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1= 0,5s$, για την ίδια περιοχή του παραθύρου.



Απάντηση:

Έστω ένα σύστημα αξόνων, όπως στο σχήμα, όπου η θέση x=0, είναι στο αριστερό άκρο του παραθύρου που παρακολουθούμε.



Η συνάρτηση που περιγράφει το παραπάνω στιγμιότυπο είναι της μορφής

$$y=A\cdot ημ(kx+φ_0)=0,2\cdot ημ\left(2\pi\frac{x}{\lambda}+\varphi_0\right)=0,2\cdot ημ(2\pi x+\varphi_0)\ ,$$

και αντικαθιστώντας x=0, y=-0,2m παίρνουμε:

$$-0,2=0,2\cdot ημφ_0 \rightarrow ημφ_0= -1 \rightarrow φ_0=\frac{3\pi}{2}\ \text{(rad)}$$

οπότε η συνάρτηση τη στιγμή t=0 παίρνει τη μορφή:

$$y=0,2\cdot ημ\left(2\pi x+\frac{3\pi}{2}\right)$$

Αλλά τότε τη στιγμή t η αντίστοιχη συνάρτηση θα έχει τη μορφή $y=f(x\text{-}\upsilon t)$ όπου $\upsilon=\lambda f=\dfrac{\lambda}{T}=0{,}5m/s$ ή

$$y=0{,}2\cdot\eta\mu\left(2\pi(x-\upsilon t)+\frac{3\pi}{2}\right)\rightarrow$$

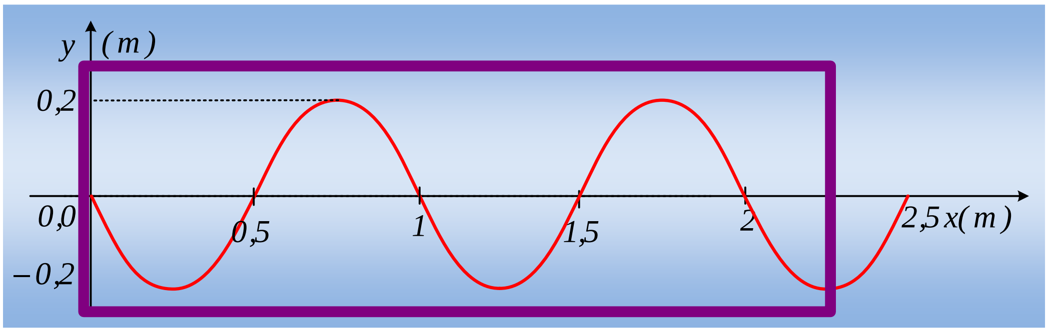
$$y=0{,}2\cdot\eta\mu\left(2\pi x-2\pi\frac{t}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)=-0{,}2\cdot\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{2}-2\pi x-\frac{3\pi}{2}\right)\rightarrow$$

$$y=0{,}2\cdot\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{2}-2\pi x-\frac{3\pi}{2}+\pi\right)=0{,}2\cdot\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{2}-2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow$$

$$y=0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-x-\frac{1}{4}\right)\quad \mu\varepsilon\ t\geq 0\ \kappa\alpha\iota\ x\leq 2{,}25+\upsilon\cdot t\quad \text{(S.I.)}$$

Οπότε τη στιγμή t=0,5s με αντικατάσταση θα πάρουμε:

$$y=0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{0{,}5}{2}-x-\frac{1}{4}\right)=-0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi(x)\quad \text{με } x\leq 2{,}25+\upsilon\cdot t\quad \text{ή}\quad x\leq 2{,}5m$$



Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η κυματική εικόνα που παίρνουμε, είναι η προηγούμενη για τη στιγμή t=0, αλλά μετατοπισμένη προς τα δεξιά κατά 0,25m, όσο διαδόθηκε το κύμα.

Βέβαια στο «παράθυρο» που παρακολουθούμε δεν βλέπουμε την διάδοση, αλλά την ταλάντωση των διαφόρων σημείων, όπου το κάθε σημείο έχει ταλαντωθεί για χρονικό διάστημα ίσο με το ¼ της περιόδου.

dmargaris@sch.gr