

Και μια άλλη εξίσωση κύματος.

Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου από αριστερά προς τα δεξιά, το οποίο περιγράφεται από τη μαθηματική εξίσωση:

$$y = 0,5 \cdot \eta \mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} + \frac{7}{4} \right) \text{ με } t \in \mathbb{R} \text{ και } t \geq 0,5x - 1,25 \text{ μονάδες στο S.I.}$$

- i) Να υπολογισθεί η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- ii) Να βρεθεί η φάση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου Ο, στη θέση $x=0$, σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- iii) Να βρεθεί η θέση μέχρι την οποία έχει διαδοθεί το κύμα στη στιγμή $t_1=1\text{s}$.
- iv) Να γίνει η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης ενός σημείου Μ, στη θέση $x_M=1\text{m}$, σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2=3\text{s}$.
- v) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1=1\text{s}$.

Η κατεύθυνση προς τα δεξιά, αλλά και η απομάκρυνση προς τα πάνω, θεωρούνται θετικές.

Απάντηση:

- i) Η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$y = 0,5 \cdot \eta \mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} + \frac{7}{4} \right) = 0,5 \cdot \eta \mu (2\pi t - \pi x + 3,5\pi) \text{ με } t \in \mathbb{R} \text{ και } t \geq 0,5x - 1,25 \text{ μονάδες στο S.I.}$$

$$\text{Αλλά τότε } \omega t = 2\pi t \rightarrow \omega = 2\pi \text{ (rad/s) ή } f = 1\text{Hz και } 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pi x \rightarrow \lambda = 2\text{m,}$$

$$\text{οπότε } v = \lambda \cdot f = 2 \text{ m/s.}$$

- ii) Η φάση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου Ο στη θέση $x=0$ είναι:

$$\varphi = (2\pi t - \pi x + 3,5\pi) = 2\pi t + 3,5\pi \text{ (rad) } \quad t \geq -1,25 \text{ s.}$$

Οπότε η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι όπως στο διπλανό σχήμα.

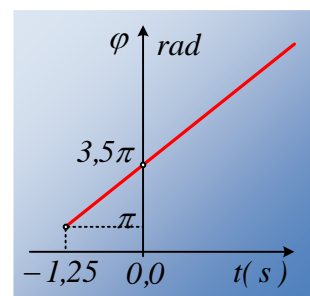
- iii) Τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει φτάσει σε κάποιο σημείο, έστω Σ, το οποίο ξεκινά την ταλάντωσή του. Αλλά αν πάρουμε την εξίσωση της φάσης:

$$\varphi = 2\pi t - \pi x + 3,5\pi \text{ με } t \in \mathbb{R} \text{ και } t \geq 0,5x - 1,25$$

$$\text{και θέσουμε } t = 0,5x - 1,25 \text{ παίρνουμε, } \varphi = \pi x - 2,5\pi - \pi x + 3,5\pi = \pi$$

πράγμα που σημαίνει ότι σε κάθε σημείο που φτάνει το κύμα, ξεκινά την ταλάντωσή του προς την αρνητική κατεύθυνση.

Αλλά τότε και το σημείο Σ έχει τη στιγμή $t_1=1\text{s}$ φάση απομάκρυνσης $\varphi_\Sigma = \pi$, οπότε:

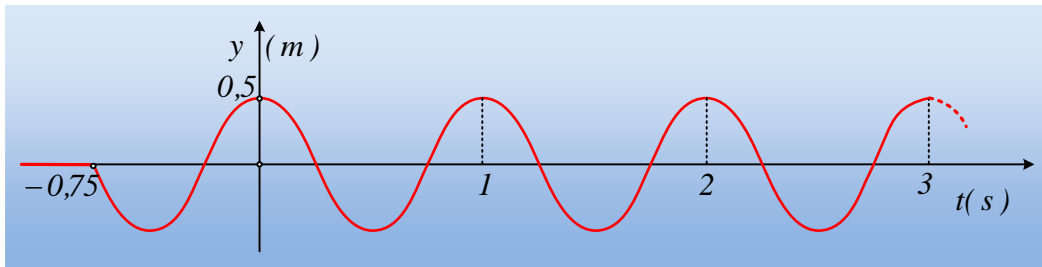


$$\varphi = 2\pi - \pi x + 3,5\pi = \pi \rightarrow 2\pi - \pi x + 3,5\pi = \pi \rightarrow x = 4,5\text{m}.$$

iv) Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Μ, προκύπτει από την εξίσωση του κύματος, αντικαθιστώντας $x=1\text{m}$, οπότε παίρνουμε:

$$y = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} + \frac{7}{4} \right) = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{1}{2} + \frac{7}{4} \right) = 0,5 \cdot \eta\mu (2\pi + 2,5\pi) \text{ με } t \geq -0,75 \text{ s}.$$

Οπότε η γραφική παράσταση είναι όπως στο παρακάτω σχήμα:



v) Αντικαθιστώντας την τιμή $t_1=1\text{s}$ στην εξίσωση του κύματος παίρνουμε:

$$y = 0,5 \cdot \eta\mu (2\pi - \pi x + 3,5\pi) = 0,5 \cdot \eta\mu (2\pi - \pi x + 3,5\pi) = 0,5 \cdot \eta\mu (5,5\pi - \pi x) \rightarrow$$

$$y = 0,5 \cdot \eta\mu \left(-\frac{\pi}{2} - \pi x \right) = -0,5 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)$$

ενώ με βάση την απάντηση στο iii) ερώτημα $x \leq 4,5 \text{ m}$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.

