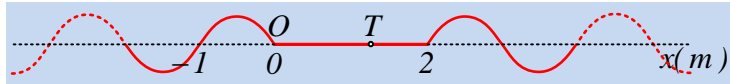


### Δύο τρέχοντα κύματα και περιοχές συμβολής.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, που θεωρούμε ότι ταυτίζεται με τον άξονα  $x$ , διαδίδονται δύο όμοια κύματα πλάτους  $A=0,2\text{m}$ , τα οποία διαδίδονται αντίθετα με συχνότητα  $1\text{Hz}$ . Τη στιγμή  $t=0$  το πρώτο κύμα φτάνει στο σημείο  $O$ , στη θέση  $x=0$ , ενώ το δεύτερο απέχει κατά  $2\text{m}$  από το  $O$ , όπως στο σχήμα.



- i) Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο τρεχόντων κυμάτων.
- ii) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που θα προκύψει μετά την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.
- iii) α) Να σχεδιάσετε τη μορφή του ελαστικού μέσου, στην περιοχή  $-2\text{m} \leq x \leq 3\text{m}$ , τη χρονική στιγμή  $t_1=1,25\text{s}$ .  
β) Να σχεδιάσετε επίσης τη μορφή του μέσου τη στιγμή  $t_1'=1\text{s}$ .
- iv) Να κάνετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος και για την περιοχή που έχει αυτό σχηματισθεί, τη χρονική στιγμή  $t_2=1,75\text{s}$ .
- v) Ένα σημείο  $\Sigma$  βρίσκεται στη θέση  $x=0,5\text{m}$ . Να κάνετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου  $\Sigma$  σε συνάρτηση με το χρόνο, από  $t=0$ , έως και  $t=4\text{s}$ .

#### Απάντηση:

- i) Από το σχήμα  $\lambda=2\text{m} \rightarrow v=\lambda f=2\text{m/s}$ .

Οπότε η εξίσωση του πρώτου κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά θα είναι:

$$y_1 = A \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0,2 \cdot \eta \mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} \right) \quad (\text{S.I.}) \quad \text{με } t \geq 0.$$

Το σημείο εξάλλου που φτάνει το 2<sup>ο</sup> κύμα ξεκινά την ταλάντωσή του προς τα πάνω (θετική φορά), οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσής του είναι:

$$y = A \cdot \eta \mu \omega t$$

Αλλά τότε το τυχαίο σημείο  $T$ , στη θέση  $x$ , θα καθυστερήσει να αρχίσει να ταλαντώνεται κατά χρονικό διάστημα  $t_1 = \frac{s}{v} = \frac{2-x}{2} \text{s}$  και η εξίσωση της απομάκρυνσής του (η εξίσωση του 2<sup>ου</sup> κύματος), θα είναι:

$$y_2 = A \cdot \eta \mu 2\pi f (t - t_1) = 0,2 \cdot \eta \mu 2\pi \left( t - \frac{2-x}{2} \right) \quad \text{ή}$$

$$y_2 = 0,2 \cdot \eta \mu 2\pi \left( t + \frac{x}{2} - 1 \right) \quad \text{με } t \geq 0 \text{ και } x \geq -2t+2 \quad (\text{S.I.})$$

- ii) Από την αρχή της επαλληλίας παίρνουμε  $y=y_1+y_2$  ή

$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{t - \frac{x}{2} - t - \frac{x}{2} + 1}{2} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t - \frac{x}{2} + t + \frac{x}{2} - 1}{2}$$

$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - \pi x) \cdot \eta\mu(2\pi - \pi) \text{ ή}$$

$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu(2\pi) \text{ (S.I.) με } t \geq 0,5\text{s και } 2-2t \leq x \leq 2t$$

iii) α) Η παραπάνω εξίσωση του στάσιμου έχει «πεδίο ορισμού»  $2-2t \leq x \leq 2t$  και για  $t_1=1,25\text{s}$  παίρνουμε  $-0,5\text{m} \leq x \leq 2,5\text{m}$  ή εναλλακτικά, το πρώτο κύμα έχει φτάσει μέχρι τη θέση  $x=v \cdot t=2,5\text{m}$  και αντίστοιχα το κύμα προς τα αριστερά, έχει διαδοθεί κατά  $2,5\text{m}$  έχοντας φτάσει στη θέση  $x=-0,5\text{m}$ . Προφανώς σε αυτήν την περιοχή έχει δημιουργηθεί το στάσιμο. Για την περιοχή αυτή έχουμε:

$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu(2\pi) = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu(2\pi \cdot 1,25) = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)$$

Αλλά τότε στην περιοχή  $-2\text{m} \leq x < -0,5\text{m}$  διαδίδεται το πρώτο κύμα το οποίο διαδίδεται προς τα δεξιά και η αντίστοιχη εξίσωση είναι:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left( 1,25 - \frac{x}{2} \right) = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu \pi x \quad -2\text{m} \leq x < -0,5\text{m}$$

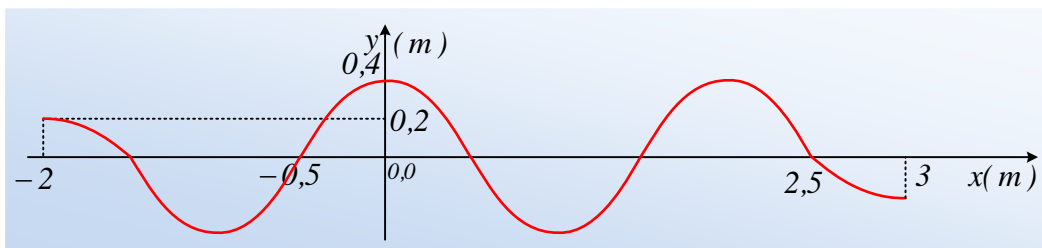
ενώ στην περιοχή  $2,5\text{m} < x \leq 3\text{m}$  υπάρχει το δεύτερο κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά, οπότε:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t + \frac{x}{2} - 1 \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left( 1,25 + \frac{x}{2} - 1 \right) = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu \pi x, \quad 2,5\text{m} < x \leq 3\text{m}$$

Ας δούμε την κατάσταση συγκεντρωτικά:

$$y = \begin{cases} 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu \pi x & \text{όταν } -2\text{m} \leq x < -0,5\text{m} \\ 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) & \text{όταν } -0,5\text{m} \leq x \leq 2,5\text{m} \\ 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu \pi x & \text{όταν } 2,5\text{m} < x \leq 3\text{m} \end{cases}$$

Με βάση αυτά η μορφή του μέσου, είναι αυτή του σχήματος:



i) β) Με τον ίδιο τρόπο, από το πεδίο ορισμού στο στάσιμο  $2-2t \leq x \leq 2t$  και για  $t_1'=1\text{s}$  παίρνουμε:

$0\text{m} \leq x \leq 2\text{m}$  ή εναλλακτικά, το πρώτο κύμα έχει φτάσει μέχρι τη θέση  $x=v \cdot t=2\text{m}$  και αντίστοιχα το κύμα προς τα αριστερά, έχει διαδοθεί κατά  $2\text{m}$  έχοντας φτάσει στη θέση  $x=0\text{m}$ . Για την περιοχή αυτή έχουμε:

$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu(2\pi) = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu(2\pi \cdot 0) = 0$$

Εξάλλου στην περιοχή  $-2\text{m} \leq x < 0\text{m}$  διαδίδεται το πρώτο κύμα το οποίο διαδίδεται προς τα δεξιά και η αντίστοιχη εξίσωση είναι:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left( 1 - \frac{x}{2} \right) = -0,2 \cdot \eta\mu \pi x \quad -2\text{m} \leq x < 0\text{m}$$

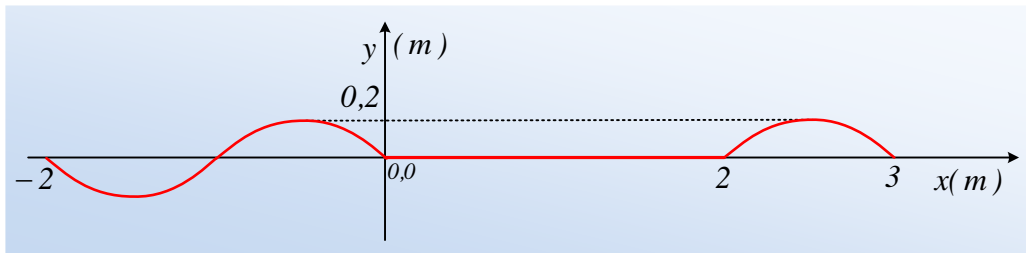
ενώ στην περιοχή  $2\text{m} < x \leq 3\text{m}$  υπάρχει το δεύτερο κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά, οπότε:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t + \frac{x}{2} - 1 \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left( 1 + \frac{x}{2} - 1 \right) = 0,2 \cdot \eta\mu \pi x, \quad 2\text{m} < x \leq 3\text{m}$$

Ας δούμε ξανά συγκεντρωτικά:

$$y = \begin{cases} -0,2 \cdot \eta\mu \pi x & \text{όταν } -2\text{m} \leq x < 0\text{m} \\ 0 & \text{όταν } 0 \leq x \leq 2\text{m} \\ 0,2 \cdot \eta\mu \pi x & \text{όταν } 2\text{m} < x \leq 3\text{m} \end{cases}$$

Και η αντίστοιχη γραφική παράσταση:



ii) Με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση του στάσιμου  $t_1=1,75\text{s}$  παίρνουμε:

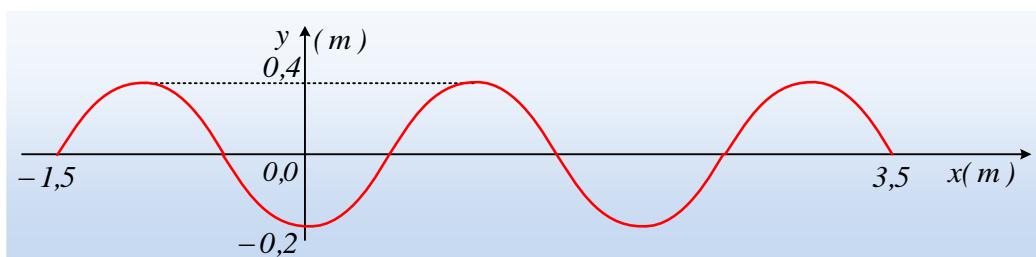
$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu(2\pi) = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu(2\pi \cdot 1,75) \quad \text{ή}$$

$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu(2\pi) = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu(2\pi \cdot 1,75)$$

$$y = -0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)$$

Ενώ με βάση το πεδίο ορισμού που δόθηκε παραπάνω  $-1,5\text{m} \leq x \leq 3,5\text{m}$  ή εναλλακτικά, το πρώτο κύμα έχει φτάσει μέχρι τη θέση  $x=v \cdot t=3,5\text{m}$  και αντίστοιχα το κύμα προς τα αριστερά, έχει διαδοθεί κατά  $3,5\text{m}$  έχοντας φτάσει στη θέση  $x=-1,5\text{m}$ .

Με βάση αυτά, το ζητούμενο στιγμιότυπο έχει τη μορφή:



iii) Το πρώτο κύμα φτάνει στο σημείο Σ, τη στιγμή  $t = \frac{x}{v} = 0,25s$  ενώ το δεύτερο τη στιγμή

$t' = \frac{2-x}{v} = 0,75s$ . Μετά τη συμβολή το Σ είναι δεσμός και δεν ταλαντώνεται, αφού το πλάτος ταλά-

ντώσής του είναι:

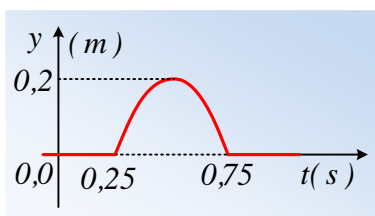
$$A_{\Sigma} = |0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)| = |0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi \cdot 0,5)| = 0$$

Στο χρονικό διάστημα  $0,25s \leq t \leq 0,75s$  ταλαντώνεται εξαιτίας του πρώτου κύματος, οπότε:

$$y_1 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{0,5}{2} \right)$$

$$y_1 = 0,2 \cdot \eta\mu \left( 2\pi - \frac{\pi}{2} \right)$$

και η ζητούμενη γραφική παράσταση έχει τη μορφή:



[dmargaris@sch.gr](mailto:dmargaris@sch.gr)