

Αν δίνονται άλλες πληροφορίες για ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα.

Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, προς την θετική κατεύθυνση (από αριστερά προς τα δεξιά) και τη στιγμή $t=0$ φτάνει στο σημείο Κ στη θέση $x=1,8\text{m}$. Το σημείο Κ ξεκινά την ταλάντωσή κινούμενο προς τα πάνω (θετική φορά) και φτάνει στην ακραία θέση του, σε απόσταση $0,2\text{m}$ σε χρονικό διάστημα $\Delta t=0,25\text{s}$, ενώ στο μεταξύ το κύμα έχει διαδοθεί φτάνοντας στο σημείο Λ, όπου $(ΚΛ)=0,1\text{m}$.

- i) Να υπολογισθεί η ταχύτητα διάδοσης του κύματος, καθώς και η εξίσωση του κύματος.
- ii) Να βρεθεί η φάση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου Ο, στη θέση $x_1=0$, σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- iii) Να βρεθεί η θέση μέχρι την οποία έχει διαδοθεί το κύμα στη στιγμή $t_1=1\text{s}$.
- iii) Να βρεθούν οι θέσεις των σημείων, τα οποία τη στιγμή $t_2=0$ έχουν μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα ταλάντωσης, στην περιοχή $-0,5\text{m} \leq x \leq 0,5\text{m}$.
- iv) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1=1\text{s}$.

Απάντηση:

- i) Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι ίση με:

$$v = \frac{(ΚΛ)}{\Delta t} = \frac{0,1\text{m}}{0,25\text{s}} = 0,4\text{m/s}$$

Εξάλλου το χρονικό διάστημα Δt που χρειάστηκε το υλικό σημείο στη θέση $x_1=1,8\text{m}$ να πάει από τη θέση ισορροπίας στην ακραία θέση του, είναι ίσο με:

$$\Delta t = \frac{T}{4} \rightarrow T = 4\Delta t = 1\text{s}, \text{ ενώ } v = \lambda f \rightarrow \lambda = vT = 0,4\text{m}$$

Το υλικό σημείο στο Κ λοιπόν, ξεκινά την ταλάντωσή του, χωρίς αρχική φάση και η εξίσωση της απομάκρυνσής του είναι:

$$y_K = A \cdot \eta\mu(\omega t) = 0,2 \cdot \eta\mu(2\pi t) \text{ μονάδες στο S.I. και } t > 0$$

Αλλά τότε ένα σημείο δεξιά του Κ στη θέση x , θα καθυστερήσει την ταλάντωσή του κατά:

$$t_1 = \frac{x - x_K}{v} = \frac{x - 1,8}{0,4} \text{ s}$$

Οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσής του (εξίσωση του κύματος), θα είναι:

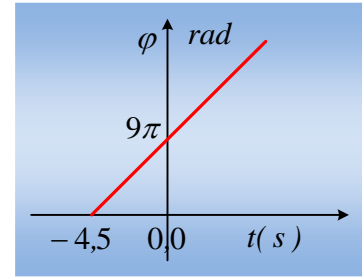
$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi(t - t_1) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x - 1,8}{0,4}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi(t - 2,5x + 4,5) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi(t - 2,5x + 4,5) \text{ με } t \in \mathbb{R} \text{ και } t \geq 2,5x - 4,5 \text{ μονάδες στο S.I.}$$

- ii) Η φάση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου Ο στη θέση $x=0$ είναι:

$$\varphi = 2\pi t - 5\pi x + 9\pi = 2\pi t + 9\pi \text{ (rad) με } t \in \mathbb{R} \text{ και } t \geq -4,5 \text{ s.}$$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση, είναι με βάση τα παραπάνω, αυτή του διπλανού σχήματος.



- iii) Τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει φτάσει σε κάποιο σημείο, έστω Σ, το οποίο ξεκινά την ταλάντωσή του. Αλλά τότε και το σημείο Σ έχει τη στιγμή $t_1=1\text{s}$ φάση απομάκρυνσης $\varphi_\Sigma=0$, οπότε:

$$\varphi = 2\pi(t - 2,5x + 4,5) = 0 \rightarrow 1 - 2,5x + 4,5 = 0 \rightarrow x = 2,2\text{m.}$$

Εναλλακτικά από 0-1s το κύμα έχει διαδοθεί κατά $s = v \cdot \Delta t = 0,4\text{m}$, ξεκινώντας από το σημείο Κ με $x_K = 1,8\text{m}$ φτάνοντας στο σημείο Σ με $x_\Sigma = x_K + s = 2,2\text{m}$.

- iv) Τα υλικά σημεία του μέσου τα οποία έχουν μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα, είναι αυτά που διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους. Θέτοντας στην εξίσωση του κύματος λοιπόν $t=0$ και $y=0$, έχουμε:

$$0,2 \cdot \eta\mu 2\pi(t - 2,5x + 4,5) = 0 \rightarrow \eta\mu 2\pi(4,5 - 2,5x) = 0 \rightarrow$$

$$9\pi - 5\pi x = k\pi \rightarrow x = 1,8 - 0,2k$$

οπότε αφού θέλουμε $-0,5\text{m} \leq x \leq 0,5\text{m}$, πρέπει:

$$-0,5 \leq 1,8 - 0,2k \leq 0,5 \rightarrow$$

$$-2,3 \leq -0,2k \leq -1,3 \rightarrow$$

$$6,5 \leq k \leq 11,5 \rightarrow$$

Άρα οι δυνατές ακέραιες τιμές του k είναι: $k = 7, 8, 9, 10$ και 11 .

Οπότε οι θέσεις των υλικών σημείων θα είναι:

$$x_1 = 0,4\text{m}, x_2 = 0,2\text{m}, x_3 = 0,0\text{m}, x_4 = -0,2\text{m} \text{ και } x_5 = -0,4\text{m}.$$

- v) Αντικαθιστώντας την τιμή $t_1=1\text{s}$ στην εξίσωση του κύματος παίρνουμε:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi(1 - 2,5x + 4,5) = 0,2 \cdot \eta\mu(2\pi - 5\pi x + 9\pi) = 0,2 \cdot \eta\mu(11\pi - 5\pi x) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu(\pi - 5\pi x) = 0,2 \cdot \eta\mu(5\pi x)$$

ενώ με βάση την απάντηση στο iii) ερώτημα $x \leq 2,2\text{m}$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.

