

### Ένα normal!!! κύμα...

Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, το οποίο εκτείνεται στη διεύθυνση του άξονα  $x$ , διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα κατά τη θετική κατεύθυνση. Θεωρούμε αρχή του άξονα το σημείο  $O$  του ελαστικού μέσου το οποίο τη χρονική στιγμή  $t = 0$  αρχίζει να εκτελεί αμείωτη αρμονική ταλάντωση με θετική ταχύτητα. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι  $0,1\text{m}$ , ενώ η μέγιστη επιτάχυνση των μορίων του μέσου είναι  $0,25\text{m/s}^2$ . Ένα σημείο  $B$  του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση  $x = 0,3\text{ m}$  τη χρονική στιγμή  $t = 8\text{ s}$  βρίσκεται για 2η φορά στη μέγιστη θετική απομάκρυνση.

Να βρεθούν:

- i) Το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- ii) Την εξίσωση του κύματος.
- iii) Την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου  $B$  τη χρονική στιγμή  $t_1 = 11/3\text{ s}$ .
- iv) Για πόσο χρόνο ταλαντώνεται μέχρι τη στιγμή  $t=8\text{s}$ , ένα σημείο  $\Gamma$  του θετικού ημιάξονα, που έχει απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του  $-5\text{ cm}$  και ταχύτητα θετική για πρώτη φορά.
- v) Να παρασταθεί γραφικά η φάση του σημείου  $\Delta$  για το χρονικό διάστημα  $0$  έως  $12\text{ s}$ , αν γνωρίζουμε ότι το σημείο  $\Delta$  έχει μικρότερη φάση από το σημείο  $B$  κατά  $\pi/2\text{ rad}$  τη χρονική στιγμή  $t$ .

Δίνεται  $\pi^2 \approx 10$ .

#### Απάντηση:

- i) Με βάση την εκφώνηση, η εξίσωση του κύματος, είναι η εξίσωση που μας δίνει το σχολικό μας βιβλίο, δηλαδή είναι της μορφής:

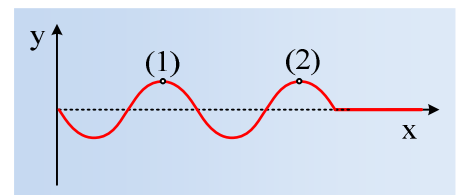
$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \text{ μονάδες στο S.I.}$$

Ενώ η μέγιστη επιτάχυνση κάθε σημείου του μέσου, έχει μέτρο  $a_{max} = \omega^2 \cdot A$  οπότε:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{max}}{A}} = \sqrt{\frac{0,25}{0,1}} \text{ rad/s} = \sqrt{\frac{25}{10}} \text{ rad/s} = \frac{5}{\pi} \text{ rad/s} \rightarrow$$

$$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ Hz} = \frac{5}{2\pi^2} \text{ Hz} = 0,25 \text{ Hz} \text{ ή } T = 4\text{s}.$$

Αλλά τότε τη χρονική στιγμή  $t_1=8\text{s}$  το σημείο  $O$  έχει εκτελέσει δύο ταλαντώσεις και κατά συνέπεια το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση ίση με  $2\lambda$ , όπου  $\lambda$  το μήκος του κύματος και ένα ποιοτικό διάγραμμα για το στιγμιότυπο του κύματος, είναι αυτό του διπλανού σχήματος. Παρατηρώντας το στιγμιότυπο αυτό βλέπουμε δύο σημεία τα οποία βρίσκονται στη μέγιστη θετική απομάκρυνσή τους. Το σημείο (2) βρίσκεται σε θέση πλάτους για πρώτη φορά, ενώ το (1) για δεύτερη φορά. Συνεπώς το σημείο



$$(1) \text{ αντιστοιχεί στο σημείο B, οπότε } x_B = \frac{3}{4} \lambda \rightarrow \lambda = \frac{4}{3} x_B = \frac{4}{3} 0,3m = 0,4m.$$

Οπότε η ταχύτητα του κύματος θα είναι:  $v = \lambda \cdot f = 0,4 \cdot 0,25m/s = 0,1m/s$ .

ii) Με βάση τα προηγούμενα η εξίσωση του κύματος παίρνει τη μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{4} - \frac{x}{0,4} \right) \text{ μονάδες στο S.I.}$$

iii) Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου B, μετά τη στιγμή που φτάνει το κύμα σε αυτό (μετά τη

στιγμή  $t = \frac{x_B}{v} = \frac{0,3}{0,1} s = 3s$ ) θα είναι:

$$y_B = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{4} - \frac{x}{0,4} \right) = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{4} - \frac{0,3}{0,4} \right) = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{4} - \frac{3}{4} \right) \text{ μονάδες στο S.I.}$$

Αλλά τότε η εξίσωση της ταλάντωσής του θα έχει τη μορφή:

$$v_B = 0,1 \cdot \omega \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left( \frac{t}{4} - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sigma\upsilon\nu \left( \frac{\pi}{2} t - \frac{3\pi}{2} \right) \text{ για } t \geq 3s, \text{ μονάδες στο S.I.}$$

$$v_B = \frac{1}{2\pi} \cdot \sigma\upsilon\nu \left( \frac{\pi}{2} \frac{11}{3} - \frac{3\pi}{2} \right) m/s = \frac{1}{2\pi} \cdot \sigma\upsilon\nu \left( \frac{\pi}{3} \right) m/s = \frac{1}{4\pi} m/s \approx 0,08m/s$$

iv) Παίρνουμε την εξίσωση του κύματος και αντικαθιστώντας  $y = -0,05m$  και  $t = 8s$ , παίρνουμε:

$$y = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{4} - \frac{x}{0,4} \right) \rightarrow -0,05 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{8}{4} - \frac{x}{0,4} \right) \rightarrow$$

$$\eta\mu(4\pi - 5\pi x) = -1/2 \rightarrow \begin{cases} 4\pi - 5\pi x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ 4\pi - 5\pi x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Αλλά παίρνοντας την εξίσωση της ταχύτητας του σημείου Γ, έχουμε:

$$v = v_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu(4\pi - 5\pi x) = v_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu \left( (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \right) < 0 \text{ απορρίπτεται, ή}$$

$$v = v_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu(4\pi - 5\pi x) = v_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu \left( 2k\pi - \frac{\pi}{6} \right) > 0 \text{ δεκτή λύση. } \rightarrow$$

$$4\pi - 5\pi x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{4}{5} + \frac{1}{30} - \frac{2}{5}k = \frac{5}{6} - \frac{2}{5}k \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

Αλλά μέχρι τη στιγμή  $t = 8s$ , το κύμα έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση  $x_l = v \cdot t = 0,1 \cdot 8m = 0,8m$ , οπότε:

$$0 \leq x \leq 0,8 \rightarrow 0 \leq \frac{5}{6} - \frac{2}{5}k \leq 0,8 \rightarrow$$

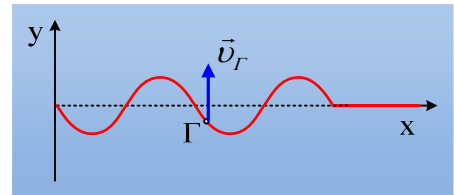
$$-\frac{5}{6} \leq -\frac{2}{5}k \leq 0,8 - \frac{5}{6} \rightarrow 25 \geq 12k \geq 1 \rightarrow$$

$k=1$  ή  $k=2$ , οπότε το σημείο Γ, βρίσκεται στις θέσεις  $x_{\Gamma} = \frac{13}{30}m$  ή  $x_{\Gamma} = \frac{1}{30}m$ .

Όμως το σημείο στη θέση  $x_{\Gamma} = \frac{1}{30}m$  βρίσκεται στη παραπάνω θέση για 2<sup>η</sup> φορά, συνεπώς η θέση του σημείου Γ είναι  $x_{\Gamma} = \frac{13}{30}m$ .

Το κύμα για να φτάσει στην παραπάνω θέση, θα χρειαστεί χρονικό διάστημα:

$$t_{\Gamma} = \frac{x_{\Gamma 1}}{v} = \frac{13}{3} s$$



Αλλά τότε το σημείο Γ ταλαντώνεται για χρονικό διάστημα:

$$\Delta t_{\Gamma} = t - t_{\Gamma 1} = 8s - \frac{13}{3} s = \frac{11}{3} s$$

ν) Για τη διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Β και Δ έχουμε:

$$\varphi_B - \varphi_{\Delta} = 2\pi \left( \frac{t}{4} - \frac{x_B}{0,4} \right) - 2\pi \left( \frac{t}{4} - \frac{x_{\Delta}}{0,4} \right) = 2\pi \frac{x_{\Gamma} - x_B}{0,4} = \frac{\pi}{2} \rightarrow$$

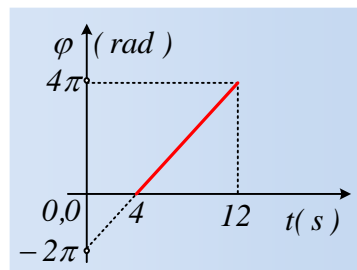
$$x_{\Delta} - x_B = 0,1m \rightarrow x_{\Delta} = 0,1m + 0,3m = 0,4m$$

Αλλά τότε το κύμα για να φτάσει στο σημείο Δ θα χρειαστεί χρονικό διάστημα  $t_{\Delta} = \frac{x_{\Delta}}{v} = 4s$  και η ε-

ξίσωση της φάσης του σημείου Δ είναι:

$$\varphi_{\Delta} = 2\pi \left( \frac{t}{4} - \frac{x_{\Delta}}{0,4} \right) = 2\pi \left( \frac{t}{4} - \frac{0,4}{0,4} \right) = \frac{\pi}{2} t - 2\pi \quad (\text{S.I.}) \quad \text{όπου } 4s \leq t \leq 12s.$$

Οπότε το ζητούμενο διάγραμμα έχει τη μορφή:



[dmargaris@sch.gr](mailto:dmargaris@sch.gr)