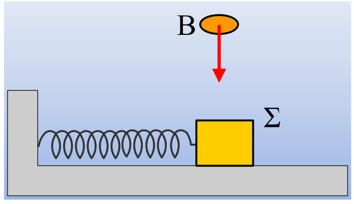
Μια ταλάντωση με κρούση. Ορμή και ενέργειες.



Το σώμα Σ μάζας m_1 ταλαντώνεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, με πλάτος Α και περίοδο Τ. Όταν το σώμα μάζας Σ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας συγκρούεται πλαστικά με το σώμα Β, μάζας m_2 που έπεφτε ελεύθερα από ύψος h, και το σύστημα συνεχίζει να ταλαντώνεται.

i) Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες:

α) Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης έμεινε η ίδια.

β) Κατά τη διάρκεια της κρούσης ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής.

γ) Η ορμή του συστήματος στην οριζόντια διεύθυνση, ελάχιστα πριν την κρούση, είναι ίση με την ορμή του ελάχιστα μετά την κρούση.

δ) Η περίοδος της ταλάντωσης αυξήθηκε.

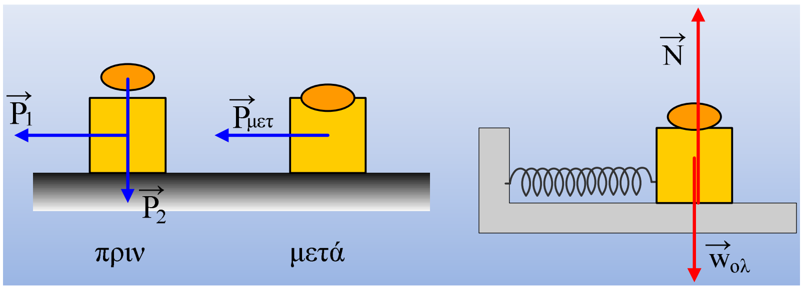
ε) Η ενέργεια της ταλάντωσης μειώθηκε.

ii) Να υπολογίσετε την απώλεια της μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση, σε συνάρτηση με το ύψος h. Πότε η απώλεια αυτή είναι ελάχιστη;

iii) Αν η κρούση δεν πραγματοποιηθεί στη θέση ισορροπίας, αλλά σε απομάκρυνση x, να βρεθεί η συνθήκη για την ελάχιστη μείωση της ενέργειας ταλάντωσης.

Απάντηση:

i) Η ορμή δεν μπορεί να διατηρηθεί, αφού πριν την κρούση το σύστημα των δύο σωμάτων έχει συνιστώσα ορμής κατακόρυφη, ίση με την ορμή του σώματος Β (**P₂**), ενώ μετά την κρούση υποχρεωτικά το σύστημα θα ταλαντωθεί σε οριζόντια διεύθυνση. Αυτό από άποψη δυνάμεων, σημαίνει ότι το σύστημα των σωμάτων δεν είναι μονωμένο.



Πράγματι στη διάρκεια της κρούσης ασκούνται στο σύστημα των σωμάτων οι εξωτερικές δυνάμεις, βάρη και κάθετη αντίδραση του επιπέδου, όπου όμως $N>>(m_1+m_2)g$

Η ορμή όμως αντίθετα διατηρείται στον άξονα x, αφού δεν υπάρχουν εξωτερικές οριζόντιες δυνάμεις που να ασκούνται στο σύστημα των σωμάτων. Συνεπώς:

$$m_1\upsilon_{1max}= (m_1+m_2)\upsilon_{κmax}. \ (1)$$

Η περίοδος μεγαλώνει αφού:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \quad ενώ \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$$

ενώ το πλάτος ταλάντωσης μειώνεται, μιας και η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος είναι μικρότερη από την κινητική ενέργεια του Σ πριν την κρούση. Πράγματι:

$$K_{μετ}= ½\,(m_1+m_2)\cdot υ_κ^{2} = ½\,(m_1+m_2)\cdot\left(\frac{m_1υ_{1\max}}{(m_1+m_2)}\right)^2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}K_{αρχ}$$

Αλλά αφού η κρούση πραγματοποιήθηκε στη θέση ισορροπίας η κινητική ενέργεια είναι ίση και με την ενέργεια κάθε ταλάντωσης. Συνεπώς

$$E_{ταλ/2}<E_{ταλ/1}$$

Με βάση όλα αυτά, οι απαντήσεις είναι:

α) Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης έμεινε η ίδια. **Σ**

β) Κατά τη διάρκεια της κρούσης ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής. **Λ**

γ) Η ορμή του συστήματος στην οριζόντια διεύθυνση, ελάχιστα πριν την κρούση, είναι ίση με την ορμή του ελάχιστα μετά την κρούση. **Σ**

δ) Η περίοδος της ταλάντωσης αυξήθηκε. **Σ**

ε) Η ενέργεια της ταλάντωσης μειώθηκε. **Σ**

ii) Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας είναι ίση με τη μείωση της κινητικής ενέργειας των δύο σωμάτων κατά τη διάρκεια της κρούσης, όπου το Β σώμα έχει πριν την κρούση κινητική ενέργεια ίση με την αρχική δυναμική m_2gh:

$$ΔE_{μηχ}=ΔK= \frac{1}{2}m_1υ_1^2+\frac{1}{2}m_2υ_2^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)υ_k^2 \rightarrow$$

$$ΔE_{μηχ}=\frac{1}{2}m_1υ_1^2+m_2gh-\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1υ_1}{(m_1+m_2)}\right)^2=\frac{1}{2}m_1υ_1^2-\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{1}{2}m_1υ_1^2+m_2gh$$

$$ΔE_{μηχ}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{1}{2}kA^2+m_2gh$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι η απώλεια της μηχανικής ενέργειας εξαρτάται από το ύψος h, συνεπώς η ελάχιστη τιμή θα προκύψει όταν $h\rightarrow 0$, οπότε δεν θα έχει κινητική ενέργεια το Β σώμα και η απώλεια της ενέργειας θα οφείλεται στη μείωση της κινητικής ενέργειας (και της ενέργειας ταλάντωσης) του σώματος Σ.

iii) Η μείωση της ενέργειας ταλάντωσης, είναι η ενέργεια ταλάντωσης πριν την κρούση μείον την ενέργεια ταλάντωσης μετά την κρούση. Έτσι αν η κρούση γίνει σε απομάκρυνση x, όπου η ταχύτητα του σώματος Σ είναι $υ_1$, θα έχουμε:

$$ΔE_{ταλ}=\left(\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m_1υ_1^2\right)-\left(\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}(m_1+m_2)υ_k^2\right)=\frac{1}{2}m_1υ_1^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)υ_k^2\rightarrow$$

$$ΔE_{ταλ}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{1}{2}m_1υ_1^2$$

Συνεπώς η μικρότερη μείωση, θα είναι στην περίπτωση που το Σ έχει την ελάχιστη κινητική ενέργεια. Αλλά αυτό θα συμβαίνει στις ακραίες θέσεις (θέσεις πλάτους) όπου $K_1=0$, οπότε δεν θα έχουμε καθόλου απώλεια ενέργειας ταλάντωσης!!

Η ενέργεια τόσο πριν, όσο και μετά την κρούση θα είναι μόνο δυναμική και ίση με $\frac{1}{2}kA^2$.

Σχόλιο:

Δεν πρέπει να συγχέουμε την μηχανική ενέργεια με την ενέργεια ταλάντωσης. Στην τελευταία περίπτωση βρήκαμε ότι αν x=$\pm A$ τότε δεν έχουμε απώλεια στην ενέργεια ταλάντωσης.

Προσοχή όμως! Δεν θα έχουμε μείωση της ενέργειας ταλάντωσης, θα έχουμε όμως μείωση μηχανικής ενέργειας, ίση με την κινητική ενέργεια του σώματος Β, δηλαδή $\Delta E_{\mu\eta\chi} = m_2 g h$

dmargaris@sch.gr