Μια περίεργη περιοδική κίνηση σαν σύνθεση ταλαντώσεων.

Ένα σώμα μάζας 0,5kg κινείται με εξίσωση κίνησης:

$$x = 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(20\pi t + \frac{5\pi}{3}\right) + 0{,}1 \cdot \eta\mu(22\pi t) \quad \text{(S.I.)}$$

i) Να αποδείξετε ότι το σώμα εκτελεί μια περιοδική αλλά όχι αρμονική κίνηση, της οποίας να βρείτε τη συχνότητα.

ii) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 που το «πλάτος» μηδενίζεται για πρώτη φορά, καθώς και η στιγμή t_2 που μεγιστοποιείται επίσης για πρώτη φορά.

iii) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{4}{3}$ s.

iv) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος την παραπάνω χρονική στιγμή;

Δίνεται $\pi^2 \approx 10$.

Απάντηση:

i) Με βάση τη θεωρία του σχολικού βιβλίου μας, η εξίσωση της κίνησης, ισοδυναμεί με την κίνηση ενός σώματος, που «εκτελεί ταυτόχρονα» δύο αρμονικές ταλαντώσεις, με εξισώσεις απομάκρυνσης:

$$x_1 = 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(20\pi t + \frac{5\pi}{3}\right) \quad \kappa\alpha\iota \quad x_2 = 0{,}1 \cdot \eta\mu(22\pi t)$$

Αλλά θα μπορούσαμε να μην κάνουμε καθόλου νύξη σε δυο κινήσεις και χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρία να πάρουμε:

$$x_{o\lambda} = x_1 + x_2 = 2 \cdot 0{,}1 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi t - {}^{5\pi}/_{3}}{2} \cdot \eta\mu\frac{42\pi t + {}^{5\pi}/_{3}}{2} \rightarrow$$

$$\boxed{x = 0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right) \cdot \eta\mu\left(21\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)} \quad (1)$$

Το «πλάτος» της περιοδικής αυτής κίνησης είναι:

$$A = \left|0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)\right|$$

Ενώ την συχνότητα της κίνησης, θα την αναζητήσουμε στη γωνία του ημιτόνου.

$$\omega = 21\pi \rightarrow f = \frac{21\pi}{2\pi} = 10{,}5 Hz$$

ii) Αν $A = 0 \rightarrow$

$$\left|0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)\right| = 0 \rightarrow$$

$$\pi t - \frac{5\pi}{6} = (2N+1)\frac{\pi}{2}$$

$$t = N + \frac{4}{3}$$

και για N=0 παίρνουμε $t_1 = \frac{4}{3} s$

Τη στιγμή που το πλάτος μεγιστοποιείται έχουμε:

$$\left| 0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\pi t - \frac{5\pi}{6} \right) \right| = 0{,}2 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\left(\pi t - \frac{5\pi}{6} \right) \pm 1 \text{ ή}$$

$$\pi t - \frac{5\pi}{6} = N\pi \rightarrow$$

$$t = N + \frac{5}{6}$$

και για N=0 έχουμε: $t_2 = \frac{5}{6} s$

iii) Ας ξαναγυρίσουμε στις δύο κινήσεις και στην αρχή της επαλληλίας. Το σώμα έχει μια ταχύτητα η οποία μπορεί να προκύψει ως το διανυσματικό άθροισμα των ταχυτήτων που θα είχε, αν εκτελούσε χωριστά τις δύο αναφερόμενες κινήσεις.

Αλλά $\upsilon_1 = \omega_1 A_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(20\pi t + \frac{5\pi}{3} \right) = 20\pi \cdot 0{,}1 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(20\pi \frac{4}{3} + \frac{5\pi}{3} \right) = 2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{85\pi}{3} \right) \rightarrow$

$$\upsilon_1 = 2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(28\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \pi \ m/s$$

Και $\upsilon_2 = \omega_2 \cdot A_2 \cdot \sigma\upsilon\nu(22\pi t) = 22\pi \cdot 0{,}1 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(22\pi \frac{4}{3} \right) \rightarrow$

$$\upsilon_2 = 2{,}2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(29\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -1{,}1\pi \ m/s$$

Συνεπώς η ταχύτητα του σώματος είναι ίση:

$$\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2 = \pi \ m/s - 1{,}1\pi \ m/s = -0{,}1\pi \ m/s = -0{,}314 \ m/s$$

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος είναι ίσος με:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{|\Sigma F| \cdot |dx| \cdot \sigma\upsilon\nu a}{dt} = |\Sigma F| \cdot |\upsilon| \cdot \sigma\upsilon\nu a$$

Όπου α η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\Sigma\vec{F}$ και $\vec{\upsilon}$.

Αλλά και η επιτάχυνση θα μπορούσε επίσης να βρεθεί με βάση την αρχή της επαλληλίας, ως το διανυσματικό άθροισμα των επιταχύνσεων, θεωρώντας ότι το σώμα εκτελεί δύο αρμονικές ταλαντώσεις.

$$a_1 = -\omega_1^2 A_1 \cdot \eta\mu\left(20\pi t + \frac{5\pi}{3} \right) = -(20\pi)^2 \cdot 0{,}1\eta\mu\left(28\pi + \frac{\pi}{3} \right) \approx -200\sqrt{3} m/s^2.$$

$$a_2 = -\omega_2^2 A_2 \cdot \eta\mu(22\pi t) = -(22\pi)^2 \cdot 0{,}1\eta\mu\left(29\pi + \frac{\pi}{3} \right) \approx 242\sqrt{3} m/s^2.$$

Οπότε $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \rightarrow$

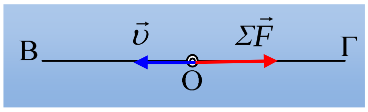
$$a = a_1 + a_2 = -200\sqrt{3}m/s^2 + 242\sqrt{3}m/s^2 = 42\sqrt{3}m/s^2$$

Αλλά τότε $\Sigma F = m\alpha = 21\sqrt{3}$ N

Και $\frac{dK}{dt} = |\Sigma F| \cdot |\upsilon| \cdot \sigma\upsilon\nu a = 21\sqrt{3} \cdot 0{,}314 \cdot (-1) J/s \approx -11{,}4 J/s$

Σχόλια:

1) Το σώμα εκτελεί μια ταλάντωση μεταξύ των σημείων Β και Γ, του διπλανού σχήματος, γύρω από την θέση Ο, με απομάκρυνση x=0 και τη στιγμή t_1 περνά από το σημείο Ο, κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση ενώ η συνισταμένη δύναμη κατευθύνεται προς τα δεξιά.



Τη στιγμή αυτή η κινητική ενέργεια μειώνεται (το σώμα επιβραδύνεται) με ρυθμό 11,4J/s, αλλά προσοχή μην συμπεράνουμε από αυτό, ότι αυξάνεται η δυναμική ενέργεια του σώματος.

Δεν ξέρουμε **αν μπορεί να οριστεί δυναμική ενέργεια,** αφού δεν γνωρίζουμε τίποτα για δυναμική ενέργεια. Η εξίσωση που βγάλαμε δεν περιγράφει καμιά ΑΑΤ!!!

2) Μην προσπαθήσει κάποιος να χρησιμοποιήσει την εξίσωση (1.35) του βιβλίου, που στην περίπτωσή μας θα πάρει τη μορφή $x = A \cdot \eta\mu\left(21\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)$ για να υπολογίσει ταχύτητα ή επιτάχυνση. Η εξίσωση αυτή είναι έτσι και αλλιώς προβληματική:

i) Παραπέμπει σε αρμονική ταλάντωση, που δεν είναι η παρούσα.

ii) Βρίσκοντας κάποιος το πλάτος Α=0, θα μπορούσε εύκολα να σκεφθεί ότι το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας (x=0), οπότε ΣF=0 και άρα $\frac{dK}{dt} = 0$. Αν προσέξουμε, το σώμα στην παραπάνω θέση έχει επιτάχυνση και η μεταφορά της θεωρίας της ΑΑΤ, στην περίπτωση του διακροτήματος, οδηγεί σε λάθος λύσεις!!!

dmargaris@sch.gr