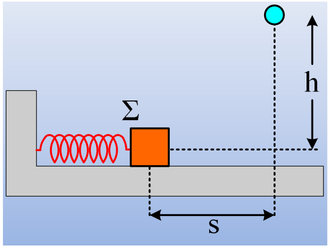
Μια κρούση στη διάρκεια της ταλάντωσης.



Το σώμα Σ μάζας M=3kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k=300N/m. Μετακινούμε το σώμα Σ προς τα αριστερά κατά 0,2m και σε μια στιγμή το αφήνουμε να ταλαντωθεί, ενώ ταυτόχρονα αφήνουμε από ορισμένο ύψος h μια μικρή σφαίρα, μάζας m=1kg, να πέσει. Τα σώματα συγκρούονται πλαστικά, αφού το Σ μετακινηθεί κατά s=0,3m. Τα σώματα θεωρούνται υλικά σημεία, αμελητέων διαστάσεων, ενώ $g=10m/s^2$.

i) Να υπολογιστεί το ύψος h.

ii) Πόση είναι η απώλεια της μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση;

iii) Να βρεθεί η μείωση της ενέργειας ταλάντωσης που οφείλεται στην κρούση.

iv) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά η σφαίρα αφήνεται από μεγαλύτερο ύψος. Πόση είναι η ελάχιστη απόσταση y, κατά την οποία πρέπει να ανυψώσουμε τη σφαίρα, σε σχέση με την αρχική της θέση, ώστε τα δυο σώματα να ξανασυγκρουσθούν στην ίδια θέση, με πριν;

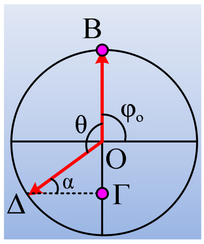
v) Για την παραπάνω περίπτωση να υπολογιστούν:

α) Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας και

β) Η μείωση της ενέργειας ταλάντωσης.

Απάντηση:

i) Αφού το σώμα Σ αφήνεται να κινηθεί από την ακραία θέση ταλάντωσης, ενώ η θέση ισορροπίας, είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, τότε το πλάτος ταλάντωσης θα είναι A=0,2m, ενώ η κρούση πραγματοποιείται σε απόσταση s-A=0,1m από τη θέση ισορροπίας.



Θεωρώντας την προς τα αριστερά κατεύθυνση ως θετική, το σώμα ξεκινά από την θέση Β με απομάκρυνση x=+A και φτάνει στη θέση Γ με απομάκρυνση x=- ½ A και χρησιμοποιώντας τα περιστρεφόμενα διανύσματα, βρίσκουμε ότι το περιστρεφόμενο διάνυσμα, (η προβολή του οποίου μας παρέχει την απομάκρυνση του σώματος), διαγράφει τη γωνία θ, του διπλανού σχήματος, σε χρόνο t.

Αλλά, με βάση το σχήμα έχουμε ότι:

$$\text{ημα}=\frac{(O\Gamma)}{(O\Delta)}=\frac{0{,}1}{0{,}2}=\frac{1}{2}\rightarrow \hat{a}=\frac{\pi}{6}\rightarrow \hat{\vartheta}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}rad$$

$$\text{Όμως } \theta=\omega t \rightarrow t=\frac{\vartheta}{\omega}=\frac{\vartheta}{\sqrt{\frac{k}{M}}}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{\sqrt{\frac{300}{3}}}=\frac{\pi}{15}s$$

Αλλά τότε το ύψος από το οποίο αφέθηκε η σφαίρα είναι:

$$h=½\, gt^2=\frac{1}{2}10\cdot\left(\frac{\pi}{15}\right)^2 m\approx 0{,}22m$$

ii) Στην οριζόντια διεύθυνση, δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στα σώματα, στη διάρκεια της κρούσης, συνεπώς:

$$P_{αρχ,χ}=P_{τελ,χ} \rightarrow Mυ=(M+m)υ_κ \quad (1)$$

Όπου $υ_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ πριν την κρούση.

$$\upsilon=\omega A\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{k}{M}}A\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t+\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow$$

$$\upsilon=\sqrt{\frac{300}{3}}0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{\frac{300}{3}}\cdot\frac{\pi}{15}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{3}m/s$$

Όπου το (-) δείχνει ταχύτητα με φορά προς τα δεξιά.

Συνεπώς από την σχέση (1) παίρνουμε:

$$\upsilon_\kappa=\frac{M\upsilon}{M+m}=\frac{3\cdot\left(-\sqrt{3}\right)}{3+1}m/s=-\frac{3\sqrt{3}}{4}m/s$$

Με βάση αυτά η απώλεια μηχανικής ενέργειας είναι:

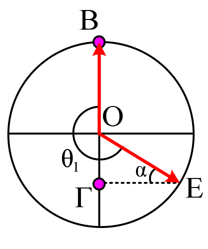
$$\Delta E_{MHX}=K_{\pi\rho}-K_{\mu\varepsilon\tau}=\frac{1}{2}M\upsilon^2+\frac{1}{2}m(gt)^2-\frac{1}{2}(M+m)\upsilon_\kappa^2\rightarrow$$

$$\Delta E_{MHX}=\frac{1}{2}3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2J+\frac{1}{2}1\cdot\left(10\cdot\frac{\pi}{15}\right)^2-\frac{1}{2}4\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2J\approx3{,}32J$$

iii) Οι ταλαντώσεις πριν και μετά την κρούση, έχουν την ίδια θέση ισορροπίας, τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Έτσι η μείωση της ενέργειας ταλάντωσης είναι:

$$\Delta E_\tau=E_{\pi\rho}-E_{\mu\varepsilon\tau}=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}M\upsilon^2-\left(\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}(M+m)\upsilon_\kappa^2\right)=\frac{1}{2}M\upsilon^2-\frac{1}{2}(M+m)\upsilon_\kappa^2$$

$$\Delta E_\tau=\frac{1}{2}3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2J-\frac{1}{2}4\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2J=1{,}125J$$



iv) Αφού αφήνουμε τη σφαίρα να πέσει από μεγαλύτερο ύψος, θα χρειαστεί περισσότερο χρόνο για την πτώση της, συνεπώς περισσότερο χρόνο θα ταλαντωθεί και το σώμα Σ. Αλλά αφού μιλάμε για το ελάχιστο ύψος, θα πρέπει να έχουμε και τον ελάχιστον ενδιάμεσο χρόνο. Συνεπώς το σώμα Σ θα βρεθεί ξανά στην ίδια θέση της κρούσης, με απομάκρυνση x=-A/2, αφού προηγουμένως έχει μηδενιστεί η ταχύτητά του, στην ακραία δεξιά θέση πλάτους. Χρησιμοποιώντας ξανά τον κύκλο αναφοράς της ταλάντωσης, η αντίστοιχη γωνία που έχει διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα είναι:

$$\vartheta_1=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{3}rad$$

Συνεπώς το χρονικό διάστημα που θα απαιτηθεί θα είναι:

$$t_1=\frac{\vartheta_1}{\omega}=\frac{\vartheta_1}{\sqrt{\frac{k}{M}}}=\frac{\frac{4\pi}{3}}{\sqrt{\frac{300}{3}}}=\frac{2\pi}{15}s$$

Αλλά τότε η σφαίρα θα έχει πέσει από ύψος $h_1=\frac{1}{2}gt_1^2=\frac{1}{2}10\cdot\left(\frac{2\pi}{15}\right)^2 m\approx 0{,}88m$, συνεπώς θα πρέπει να την ανυψώσουμε κατά $y=h_1-h=0{,}66m$.

v) Υπολογίζουμε ξανά την νέα ταχύτητα του σώματος Σ πριν την κρούση (μπορούμε να το κάνουμε ξανά με χρήση την εξίσωση της ταχύτητας), με βάση την διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης:

$$K+U=E\rightarrow\frac{1}{2}M\upsilon_1^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2$$

Η παραπάνω εξίσωση προφανώς είναι ίδια και για την περίπτωση που το σώμα περνά από τη θέση x=-A/2, κινούμενο προς τα δεξιά, συνεπώς το μέτρο της ταχύτητας σε μια ορισμένη θέση, είναι το ίδιο, ανεξάρτητα της φοράς κίνησης, οπότε $\upsilon_1=\sqrt{3}m/s$.

α) Δουλεύοντας στην συνέχεια όπως και στην πρώτη κρούση παίρνουμε:

$$\upsilon_{\kappa 1}=\frac{M\upsilon_1}{M+m}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{3+1}m/s=\frac{3\sqrt{3}}{4}m/s$$

$$\Delta E_{MHX}=K_{\pi\rho}-K_{\mu\varepsilon\tau}=\frac{1}{2}M\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m(gt_1)^2-\frac{1}{2}(M+m)\upsilon_{\kappa 1}^2\rightarrow$$

$$\Delta E_{MHX}=\frac{1}{2}3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 J+\frac{1}{2}1\cdot\left(10\cdot\frac{2\pi}{15}\right)^2-\frac{1}{2}4\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 J\approx 9{,}9J$$

β) Ενώ για την μείωση της ενέργειας ταλάντωσης:

$$\Delta E_\tau=E_{\pi\rho}-E_{\mu\varepsilon\tau}=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}M\upsilon_1^2-\left(\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}(M+m)\upsilon_{\kappa 1}^2\right)=\frac{1}{2}M\upsilon_1^2-\frac{1}{2}(M+m)\upsilon_{\kappa 1}^2$$

$$\Delta E_\tau=\frac{1}{2}3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 J-\frac{1}{2}4\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 J=1{,}125J$$

Σχόλια:

1) Για την επίλυση της άσκησης, μας χρειάζεται ο χρόνος κίνησης μέχρι τη στιγμή της κρούσης. Προτιμήθηκε η λύση με τα περιστρεφόμενα διανύσματα. Προφανώς θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και επίλυση τριγωνομετρικής εξίσωσης, χρησιμοποιώντας την εξίσωση της απομάκρυνσης:

$$x=A\cdot\eta\mu\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

Και θέτοντας x=-A/2.

2) Αν προσέξουμε τα αποτελέσματα που βρήκαμε προηγούμενα, θα δούμε ότι έχουμε διαφορετικές τιμές μείωσης της μηχανικής ενέργειας στις δύο κρούσεις, αλλά ίσες τιμές για την μείωση της ενέργειας ταλάντωσης. Αυτό συμβαίνει αφού στην μηχανική ενέργεια συνυπολογίζεται και η κινητική ενέργεια της σφαίρας, ενώ στην ενέργεια ταλάντωσης όχι.

dmargaris@sch.gr