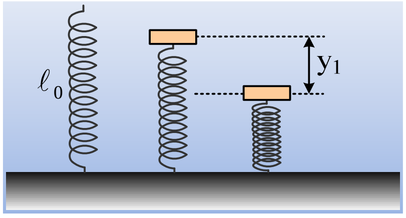
Μια ΑΑΤ…. τμήμα μιας ταλάντωσης.



Ένα κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο, σταθεράς k=200N/m, στηρίζεται στο έδαφος με το κάτω άκρο του, ενώ στο πάνω άκρο του ηρεμεί ένα σώμα μάζας m=8kg, χωρίς να είναι δεμένο με το ελατήριο. Ασκώντας κατάλληλη κατακόρυφη δύναμη, εκτρέπουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά y_1=0,8m και για t=0 το αφήνουμε να κινηθεί.

i) Ν' αποδειχθεί ότι, για όσο χρόνο το σώμα βρίσκεται σε επαφή με το ελατήριο, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

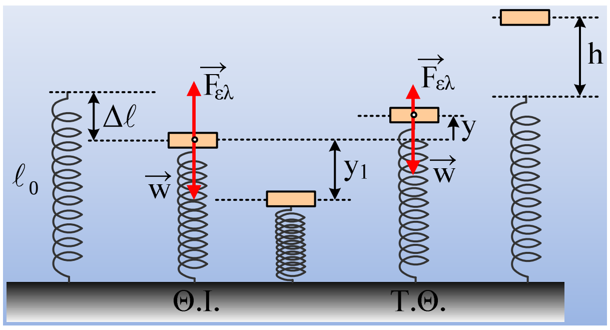
ii) Ποια χρονική στιγμή το σώμα εγκαταλείπει το ελατήριο; Τι κίνηση θα πραγματοποιήσει από κει και πέρα;

iii) Πόσο θα απέχει το σώμα από το πάνω άκρο του ελατηρίου, τη στιγμή που θα μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητά του;

iv) Ποια χρονική στιγμή το σώμα θα επιστρέψει ξανά στην αρχική του θέση, για πρώτη φορά;

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Στη θέση ισορροπίας:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{ελ}= w \rightarrow k\Delta\ell = mg \rightarrow$$

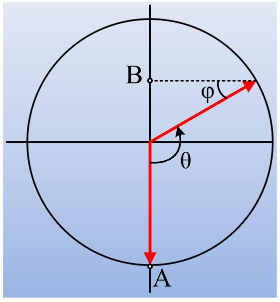
$$\Delta\ell = \frac{mg}{k} = \frac{8\cdot 10}{200}m = 0{,}4m$$

Έστω το σώμα σε μια τυχαία θέση που απέχει κατά y από την θέση ισορροπίας, όπως στο σχήμα:

$$\Sigma F= F_{ελ}-w = k(\Delta\ell - y)-mg = k\Delta\ell - ky - mg = -ky$$

άρα το σώμα εκτελεί α.α.τ. με σταθερά επαναφοράς D=k, αφού η δύναμη είναι ανάλογη της απομάκρυνσης y από τη θέση ισορροπίας και έχει και αντίθετη κατεύθυνση από την απομάκρυνση (κατευθύνεται προς την θέση ισορροπίας, είναι δηλαδή μια δύναμη επαναφοράς).

ii) Το σώμα θα εγκαταλείψει το ελατήριο, μόλις αυτό αποκτήσει το φυσικό του μήκος, δηλαδή σε απομάκρυνση 0,4m πάνω από την θέση ισορροπίας. Από και πέρα θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση g. (κατακόρυφη βολή)



Παίρνουμε τον κύκλο αναφοράς της ταλάντωσης. Αρχικά το σώμα βρίσκεται στην θέση Α και θα εγκαταλείψει το ελατήριο στο σημείο Β. Αλλά η γωνία φ είναι ίση με 30°, αφού η απέναντι κάθετος είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, συνεπώς το περιστρεφόμενο διάνυσμα διαγράφει γωνία θ= $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$. Εξάλλου η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του διανύσματος είναι ίση με την γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης, όπου:

$$k=m\omega^2 \rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{200}{8}}rad/s=5rad/s$$

Έτσι το χρονικό διάστημα που απαιτείται είναι:

$$\Delta t_1=\frac{\theta}{\omega}=\frac{2\pi/3}{5}s=\frac{2\pi}{15}s$$

iii) Τη στιγμή που το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος, η ενέργεια ταλάντωσης είναι:

$$½ m\upsilon^2 + ½ ky^2 = ½ kA^2. \ (1)$$

όπου y=Δℓ =0,4m.

Εφαρμόζουμε για το σώμα την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, ανάμεσα στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και στο μέγιστο ύψος (λαμβάνοντας στην αρχική θέση U=0) και παίρνουμε:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}\rightarrow$$

$$½ m\upsilon^2 = mgh \ (2)$$

Από (1) και (2) παίρνουμε:

$$mgh= ½ kA^2- ½ ky^2 \rightarrow$$

$$h=\frac{k(A^2-y^2)}{2mg}=\frac{200(0{,}8^2-0{,}4^2)}{2\cdot 8\cdot 10}m=0{,}6m$$

Όμως αφού το ελατήριο θεωρείται ιδανικό, δεν έχει μάζα, οπότε δεν εμφανίζει αδράνεια, με αποτέλεσμα μόλις αποκτήσει το φυσικό μήκος του, να παραμένει ως έχει, χωρίς να επιμηκυνθεί. Άρα η απόσταση του πάνω άκρου του από το σώμα, θα είναι επίσης h=0,6m.

iv) Από την εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$½ m\upsilon^2 + ½ ky^2 = ½ kA^2 \rightarrow$$

$$\upsilon=\sqrt{\frac{k}{m}(A^2-y^2)}=\sqrt{\frac{200}{8}(0{,}8^2-0{,}4^2)}m/s=\sqrt{12}m/s=\upsilon_o$$

Όπου $\upsilon=\upsilon_o$ η ταχύτητα με την οποία το σώμα εγκαταλείπει το ελατήριο.

Αλλά για την κατακόρυφη βολή που πραγματοποιεί το σώμα ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon=\upsilon_0-gt \quad και \quad \Delta y=\upsilon_0\cdot\Delta t- ½ g\cdot(\Delta t)^2$$

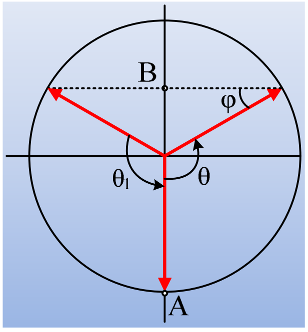
τη στιγμή που το σώμα πέφτοντας έρχεται ξανά σε επαφή με το ελατήριο, Δy=0 και από την $2^η$ από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε:

$$0=\upsilon_0\cdot \Delta t- ½\, g\cdot(\Delta t)^2 \rightarrow \Delta t\left(\sqrt{12}-\frac{1}{2}10\cdot\Delta t\right)=0 \rightarrow$$

Δt=0 (λύση που αντιστοιχεί στην στιγμή που το σώμα κινείται προς τα πάνω) ή

$$\Delta t_2=\frac{\sqrt{12}}{5}s$$

Μόλις το σώμα πέφτοντας, έρθει σε επαφή με το ελατήριο, θα κάνει ξανά α.α.τ. ξεκινώντας τώρα από την ίδια θέση Β και το περιστρέφομενο διάνυσμα θα διαγράψει γωνία $\theta_1=\theta$ (βλέπε σχήμα) μέχρι το σώμα να φτάσει στην αρχική του θέση Α. Αλλά τότε θα χρειαστεί επίσης χρονικό διάστημα:



$$\Delta t_3=\Delta t_1=\frac{2\pi}{15}s$$

Με βάση αυτά το σώμα θα επιστρέψει στην αρχική του θέση τη χρονική στιγμή:

$$t=\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3=2\frac{2\pi}{15}s+\frac{\sqrt{12}}{5}s\approx 1{,}5s$$

Σχόλιο.

Για όσο χρόνο το σώμα βρίσκεται σε επαφή με το ελατήριο εκτελεί ΑΑΤ. Μόλις χάσει την επαφή του, η κίνηση παύει να είναι ΑΑΤ και έχουμε μια κατακόρυφη βολή.

Αν δούμε όμως συνολικά την κίνηση, θα δούμε ότι έχουμε μια Ταλάντωση (όχι ΑΑΤ) με ακραίες θέσεις που απέχουν κατά $y_1+\Delta\ell+h=0{,}8m+0{,}4m+0{,}6m=1{,}8m$ και με περίοδο T=1,5s, ίση με το χρόνο που βρήκαμε στο τελευταίο ερώτημα.

Βέβαια για την συνολική ταλάντωση, δεν έχουμε θέση ισορροπίας, ούτε ενέργεια ταλάντωσης, στοιχεία που χαρακτηρίζουν την ΑΑΤ.

dmargaris@sch.gr