# *Η ταλάντωση μιας μεμβράνης.*

Όταν μπροστά από ένα μικρόφωνο πάλλεται μια ηχητική πηγή $Π_1$, η μεμβράνη του μικροφώνου, μάζας 2g, εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης $x_1=3\cdot ημ(20πt)$ (mm). Αν ταυτόχρονα φέρουμε δίπλα και μια δεύτερη ηχητική πηγή $Π_2$ και θέσουμε ταυτόχρονα σε λειτουργία και τις δύο πηγές, τότε η μεμβράνη εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης $x=4\cdot ημ\left(20\pi t+\frac{3\pi}{2}\right)$ (mm).

i) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της μεμβράνης, αν αντί να πάλλονται και οι δύο, σιγήσει η πρώτη πηγή.

ii) Να υπολογιστεί η μέγιστη κινητική ενέργεια της μεμβράνης, όταν:

α) πάλλεται μόνο η πηγή $Π_1$.

β) πάλλεται μόνο η πηγή $Π_2$.

γ) πάλλονται και οι δύο πηγές.

iii) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της μεμβράνης, στην περίπτωση που πάλλονται και οι δύο πηγές, τη χρονική στιγμή $t_1=1/30$s.

**Απάντηση:**

i) Στην περίπτωση που πάλλονται και οι δύο ηχητικές πηγές, στην μεμβράνη του μικροφώνου φτάνουν δύο ηχητικά κύματα, τα οποία την εξαναγκάζουν να ταλαντωθεί. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε την ταλάντωσή της, σαν επαλληλία δύο ανεξαρτήτων ταλαντώσεων με απομακρύνσεις $x_1$ και $x_2$, όπου:

$$x=x_1+x_2.$$

Αλλά βλέποντας τις φάσεις των απομακρύνσεων που μας δίνονται, παρατηρούμε ότι η πρώτη ταλάντωση καθώς και η σύνθετη, έχουν την ίδια συχνότητα (ω=20π), συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συνολική ταλάντωση, προκύπτει ως σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας.

Αλλά ας δούμε την εξίσωση 1.27 του σχολικού βιβλίου:

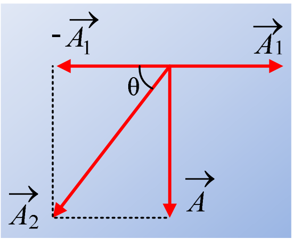
$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2συνφ}$$

Είναι μια σχέση, η οποία παραπέμπει σε συνισταμένη δύο διανυσμάτων $\vec{A}_1$ και $\vec{A}_2$ που η μεταξύ τους γωνία είναι φ. Δηλαδή θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2 \rightarrow \vec{A}_2=\vec{A}-\vec{A}_1 \quad ή$$

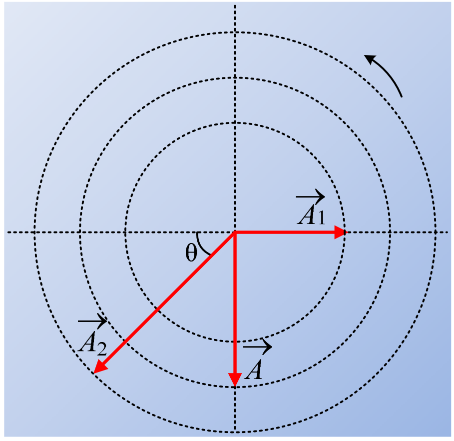
$$\vec{A}_2=\vec{A}+(-\vec{A}_1)$$

Η τελευταία σχέση, μας λέει ότι το πλάτος $A_2$ μπορεί να προκύψει ως σύνθεση δύο διανυσμάτων του $\vec{A}$ και του $(-\vec{A}_1)$, όπως στο διπλανό σχήμα.




$$A_2=\sqrt{A_1^2+A^2}=\sqrt{3^2+4^2}mm=5mm$$

Ενώ $\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{A}{A_1} = \frac{4}{3}$




Μήπως αυτά μας θυμίζουν κάτι; Αν πάρουμε τον κύκλο αναφοράς (τα περιστρεφόμενα διανύσματα) των ταλαντώσεων θα έχουμε, ότι η προβολές των διανυσμάτων $A_1$ και $A_2$ στον κατακόρυφο άξονα y, θα μας δίνουν τις απομακρύνσεις για τις δύο αρμονικές ταλαντώσεις.

Αλλά τότε, η φάση της απομάκρυνσης της δεύτερης ταλάντωσης, θα προηγείται της φάσης της πρώτης, κατά Δφ=π+θ και η εξίσωσή της θα είναι:

$$x_2=5\cdot \eta\mu(20\pi t + \vartheta) \text{ (mm)}$$

όπου θ η γωνία που έχει $\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{4}{3}$.

ii) α) Όταν πάλλεται μόνο η πρώτη πηγή έχουμε:

$$K_{\max} = \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A_1^2 = \frac{1}{2}2\cdot 10^{-3}\cdot(20\pi)^2\cdot 9\cdot 10^{-6}\,J = 36\cdot 10^{-6}\,J$$

β) Όταν πάλλεται μόνο η δεύτερη πηγή:

$$K_{\max} = \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A_2^2 = \frac{1}{2}2\cdot 10^{-3}\cdot(20\pi)^2\cdot 5^2\cdot 10^{-6}\,J = 10^{-4}\,J = 100\cdot 10^{-6}\,J$$

γ) Όταν πάλλονται και οι δύο πηγές:

$$K_{\max} = \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}2\cdot 10^{-3}\cdot(20\pi)^2\cdot 4^2\cdot 10^{-6}\,J = 64\cdot 10^{-6}\,J$$

iii) Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{|\Sigma F|\cdot|dx|\cdot\sigma\upsilon\nu a}{dt} = |\Sigma F|\cdot|\upsilon|\cdot\sigma\upsilon\nu a$$

Όπου α η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\Sigma\vec{F}$ και $\vec{\upsilon}$.

Αλλά αφού x=4·ημ$\left(20\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$ (mm), θα έχουμε:

$$\upsilon = \omega A\cdot\sigma\upsilon\nu\left(20\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) = 20\pi\cdot 4\cdot 10^{-3}\sigma\upsilon\nu\left(20\pi\frac{1}{30} + \frac{3\pi}{2}\right) \approx 0{,}25\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{6}\right) \rightarrow$$

$$\upsilon \approx 0{,}25\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 0{,}13\sqrt{3}\,m/s$$

Και $a = -\omega^2 A\cdot\eta\mu\left(20\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) = -(20\pi)^2\cdot 4\cdot 10^{-3}\eta\mu\left(\frac{13\pi}{6}\right) \approx -7{,}9\,m/s^2$

Συνεπώς ΣF=mα=-2·$10^{-3}$·7,9N=-15.8·$10^{-3}$N και

$$\frac{dK}{dt} = |\Sigma F| \cdot |\upsilon| \cdot \sigma\upsilon\nu a = 15{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}13\sqrt{3} \cdot 1 J/s \approx 3{,}5 \cdot 10^{-3} J/s$$

**dmargaris@sch.gr**