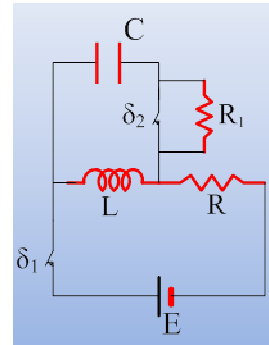


Αμείωτη και φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση.

Για το κύκλωμα του διπλανού σχήματος δίνονται ότι $E=100V$, $C=80\mu F$, το ιδανικό πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L=0,2H$, ενώ $R=5\Omega$, και οι διακόπτες δ_1 , δ_2 είναι κλειστοί για μεγάλο χρονικό διάστημα. Υπενθυμίζεται ότι κλειστός διακόπτης δ_2 σημαίνει βραχυκυκλωμένη αντίσταση, άρα σαν να μην υπάρχει στο κύκλωμα.



- i) Πόση ενέργεια είναι αποθηκευμένη στο πηνίο και πόση στον πυκνωτή;
- ii) Σε μια στιγμή που θεωρούμε $t_0=0$, ανοίγουμε τον διακόπτη δ_1 .
 - α) Εξηγήστε γιατί θα φορτιστεί ο πυκνωτής. Ποιος από τους σπλισμούς του πυκνωτή θα αποκτήσει πρώτος θετικό φορτίο;
 - β) Βρείτε την εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας θετική την αρχική ένταση.
- iii) Τη χρονική στιγμή $t_1=134\pi/3$ ms ανοίγουμε και το διακόπτη δ_2 . Για αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη, να βρεθούν:
 - α) Το φορτίο του πυκνωτή και η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη.
 - β) Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη με αντίσταση $R_1=10\sqrt{3}\Omega$.
 - γ) Οι ρυθμοί μεταβολής των ενεργειών του πηνίου και του πυκνωτή.

Απάντηση:

- i) Αφού ο διακόπτης δ_1 είναι κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα, το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης, χωρίς να έχουμε φαινόμενα αυτεπαγωγής, τιμής:

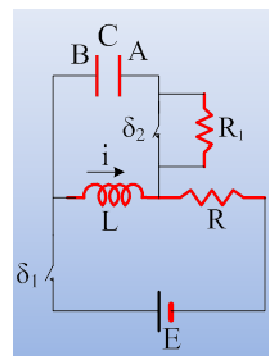
$$I = \frac{E}{R} = \frac{100V}{5\Omega} = 20A$$

Οπότε το πηνίο έχει ενέργεια μαγνητικού πεδίου:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}0,2 \cdot 20^2 J = 40J$$

Αλλά από τη στιγμή που δεν έχουμε φαινόμενα αυτεπαγωγής στο πηνίο, δεν υπάρχει ΗΕΔ λόγω αυτεπαγωγής πάνω του και η τάση στα άκρα του είναι μηδενική, αλλά τότε μηδενική είναι και η τάση μεταξύ των σπλισμών του πυκνωτή, ο οποίος παραμένει αφόρτιστος, χωρίς να περικλείει και ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου.

- ii) α) Τη στιγμή που ανοίγουμε το διακόπτη δ_1 , το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα, όπως στο σχήμα και λόγω αυτεπαγωγής θα συνεχίσει να διαρρέεται από ρεύμα της ίδιας φοράς. Αλλά τότε το ρεύμα μεταφέρει θετικό φορτίο στον σπλισμό Α του πυκνωτή, ο οποίος φορτίζεται θετικά. (μιλάμε για την συμβατική φορά του ρεύματος, στην πραγματικότητα τα ελεύθερα ηλεκτρόνια κινούνται αντίθετα και μεταφέρονται στον σπλισμό Β, ο οποίος αποκτά αρνητικό φορτίο).



β) Στο κύκλωμα LC θα έχουμε μια αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση, με πλάτος έντασης ρεύματος $I=20\text{A}$ (η τιμή του ρεύματος τη στιγμή που ανοίγουμε το διακόπτη δ_1), όπου όμως οι εξισώσεις του σχολικού βιβλίου $q=Q\sin\omega t$ και $i=I\eta\mu\omega t$ δεν ισχύουν εδώ, αφού τη στιγμή $t=0$ το φορτίο του πυκνωτή δεν είναι μέγιστο. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε λοιπόν τις εξισώσεις $q=Q\sin(\omega t+\phi)$ και $i=I\eta\mu(\omega t+\phi)$ βρίσκοντας την αρχική φάση ϕ , αλλά θα προτιμήσουμε, σε συμφωνία με τις μηχανικές ταλαντώσεις να πάρουμε τις μορφές:

$$q=Q\cdot\eta\mu(\omega t+\phi_0) \text{ και } i=I\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi_0)$$

Αντικαθιστώντας $t=0$ παίρνουμε $q=Q\cdot\eta\mu\phi_0 \rightarrow \eta\mu\phi_0=0$, οπότε $\phi_0=0$ ή $\phi_0=\pi$

Αλλά τότε $i=I\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega\cdot 0+\phi_0)=I\cdot\sigma\upsilon\nu\phi_0$, οπότε:

$$i=I\cdot\sigma\upsilon\nu 0 > 0 \text{ δεκτή ή } i=I\cdot\sigma\upsilon\nu\pi < 0 \text{ απορρίπτεται.}$$

$$\text{Εξάλλου } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,2 \cdot 80 \cdot 10^{-6}}} \text{ rad/s} = 250 \text{ rad/s}, \text{ ενώ}$$

$$I=\omega \cdot Q \rightarrow Q = \frac{I}{\omega} = \frac{20}{250} \text{ C} = 0,08 \text{ C}$$

Έτσι οι εξισώσεις γίνονται:

$$q=Q\cdot\eta\mu\omega t = 0,08\cdot\eta\mu(250t) \text{ και } i=20\cdot\sigma\upsilon\nu(250t) \text{ μονάδες στο S.I.}$$

iii) α) Αντικαθιστώντας στις παραπάνω εξισώσεις τη στιγμή $t = \frac{134\pi}{3} \text{ ms}$, παίρνουμε:

$$q = 0,08 \cdot \eta\mu\left(250 \cdot \frac{134\pi}{3} 10^{-3}\right) = 0,08 \cdot \eta\mu\left(\frac{33,5\pi}{3}\right) = 0,08 \cdot \eta\mu\left(11\pi + \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow$$

$$q = 0,08 \cdot \eta\mu\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -0,04 \text{ C}$$

$$\text{Και } i = 20 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(250 \cdot \frac{134\pi}{3} 10^{-3}\right) = 20 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(250 \cdot \frac{134\pi}{3} 10^{-3}\right) = 20 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(11\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$i = 20 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -10\sqrt{3} \text{ A}$$

Με το άνοιγμα του διακόπτη δ_2 (αμέσως μετά) το ρεύμα θα συνεχίσει να έχει την ίδια ένταση, αλλά θα περνά πλέον μέσα από τον αντιστάτη με αντίσταση R_1 .

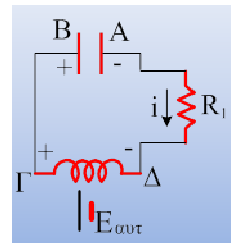
Δηλαδή μόλις ανοίξουμε και τον διακόπτη δ_2 η κατάσταση είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, από όπου γίνεται φανερό ότι ο πυκνωτής φορτίζεται.

$$\beta) \text{ Τη στιγμή αυτή } V_{AB} = V_c = \frac{q}{C} = \frac{-0,04}{80 \cdot 10^{-6}} \text{ V} = -500 \text{ V},$$

$$\text{ενώ } V_{\Delta\Lambda} = |i| R_1 = 10\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} \text{ V} = 300 \text{ V}$$

Αλλά από το 2^ο κανόνα του Kirchhoff παίρνουμε:

$$V_{BA} + V_{\Delta\Lambda} + V_{\Delta\Gamma} + V_{\Gamma B} = 0 \rightarrow$$



$$500V + 300V + V_{\Delta\Gamma} + 0 = 0 \rightarrow$$

$$V_{\Delta\Gamma} = -800V \text{ ή } V_{\Gamma\Delta} = 800V$$

Δηλαδή στο πηνίο εμφανίζεται ΗΕΔ από αυτεπαγωγή με πολικότητα όπως στο σχήμα, πράγμα που σημαίνει ότι το πηνίο λειτουργεί σαν ηλεκτρική πηγή, παρέχοντας ενέργεια στο κύκλωμα, με αποτέλεσμα να μειώνεται η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του.

Αλλά τότε, πόση είναι η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή;

Η ΗΕΔ αυτή, είναι η αιτία που το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα και αφού η ένταση είναι αρνητική και η ΗΕΔ θα είναι αρνητική, δηλαδή $E_{avt} = -800V$. Να το πούμε με άλλα λόγια. Δεχτήκαμε την αρχική ένταση του ρεύματος θετική, αλλά με τον τρόπο αυτό, δεχτήκαμε και μια φορά διαγραφής του κυκλώματος, την αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, ως θετική. Τότε κάθε πηγή με πολικότητα τέτοια που να δίνει θετική ένταση ρεύματος θεωρείται θετικής ΗΕΔ, ενώ κάθε πηγή αντίθετης πολικότητας θα χαρακτηρίζεται αρνητική.

$$E_{avt} = -L \frac{di}{dt} \rightarrow$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{E_{avt}}{L} = -\frac{-800V}{0,2H} = 4.000A/s$$

γ) Με βάση τα προηγούμενα θα έχουμε:

$$\frac{dU_B}{dt} = -|E_{avt}| |i| = -800V \cdot 10\sqrt{3}A = -8.000\sqrt{3}J/s$$

$$\frac{dU_E}{dt} = +|V_c| |i| = +500V \cdot 10\sqrt{3}A = +5.000\sqrt{3}J/s$$

Σχόλιο:

Με το άνοιγμα του διακόπτη δ_2 ο αντιστάτης R_1 αρχίζει να διαρρέεται από ρεύμα, με αποτέλεσμα να απορροφά ενέργεια από το κύκλωμα (την οποία μετατρέπει σε θερμική ενέργεια) με ρυθμό:

$$\frac{dQ_g}{dt} = P = i^2 R_1 = (10\sqrt{3})^2 \cdot 10\sqrt{3}J/s = 3.000\sqrt{3}J/s$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε τη διατήρηση της ενέργειας στο κύκλωμα αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη δ_2 . Το πηνίο λειτουργεί σαν πηγή προσφέροντας ενέργεια στα φορτία (στο ρεύμα) με ρυθμό $8.000\sqrt{3}J/s$, η οποία κατά ένα μέρος αποθηκεύεται στον πυκνωτή με τη μορφή ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου με ρυθμό $5.000\sqrt{3}J/s$, ενώ τα υπόλοιπα $3.000\sqrt{3}J/s$ υποβαθμίζονται αυξάνοντας την εσωτερική ενέργεια του αντιστάτη. Έχει επικρατήσει να λέμε ότι στον αντιστάτη παράγεται θερμότητα με ρυθμό $3.000\sqrt{3}J/s$