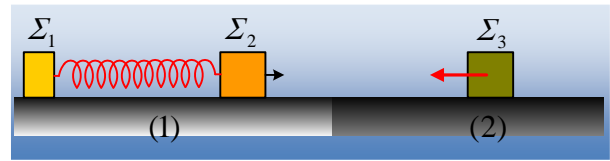


### Ένα μονωμένο σύστημα και ολίγον από ΑΑΤ.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο (1) ηρεμούν δυο σώματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ , με μάζες  $m_1=1\text{kg}$  και  $m_2=2\text{kg}$  αντίστοιχα, δεμμένα στα άκρα ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς  $k=50\text{N/m}$  και φυσικού μήκους  $\ell_0=0,7\text{m}$ . Μετακινούμε το  $\Sigma_1$ , μέ-



χρι το ελατήριο να αποκτήσει μήκος  $\ell_1=0,3\text{m}$  και σε μια στιγμή αφήνουμε τα σώματα να κινηθούν. Στο σώμα  $\Sigma_2$  έχει προσαρμοστεί ένα καρφάκι και μόλις περάσει στο οριζόντιο επίπεδο (2), όπου δεν είναι λείο, συγκρούεται με ένα ξύλινο σώμα  $\Sigma_3$ , μάζας  $m_3=4\text{kg}$ , το οποίο κινείται αντίθετα και το οποίο, τη στιγμή της κρούσης έχει ταχύτητα μέτρου  $v_3=0,5\text{m/s}$ . Κατά τη διάρκεια της κρούσης το καρφάκι καρφώνεται στο ξύλο, οπότε δημιουργείται συσσωμάτωμα, το οποίο έχει μηδενική ταχύτητα, αμέσως μετά την κρούση.

Δίνονται οι συντελεστές τριβής μεταξύ του επιπέδου (2) και του συσσωματώματος  $\mu=\mu_s=0,2$ , τα σώματα θεωρούνται υλικά σημεία αμελητέων διαστάσεων και  $g=10\text{m/s}^2$ .

- i) Να υπολογιστούν τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  ελάχιστα πριν την κρούση (να μην ληφθεί υπόψη η ανάπτυξη τριβής στο  $\Sigma_2$  κατά την είσοδό του στο (2) επίπεδο).
- ii) Ποια η απόσταση των σωμάτων  $\Sigma_1$ - $\Sigma_2$  τη στιγμή της κρούσης;
- iii) Να υπολογιστεί η τριβή που θα ασκηθεί στο συσσωμάτωμα, αμέσως μετά την κρούση.
- iii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του  $\Sigma_1$ , τη στιγμή που θα αρχίσει η ολίσθηση του συσσωματώματος.

#### Απάντηση:

- i) Κατά την πλαστική κρούση μεταξύ των σωμάτων  $\Sigma_2$  και  $\Sigma_3$ , η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή (ισχύει η Α.Δ.Ο.):

$$\vec{P}_{\text{πρ}} = \vec{P}_{\text{μετ}} \rightarrow$$

$$m_2 v_2 + m_3 v_3 = 0$$

$$v_2 = -\frac{m_3}{m_2} v_3 = -\frac{4}{2}(-0,5)\text{m/s} = 1\text{m/s}$$

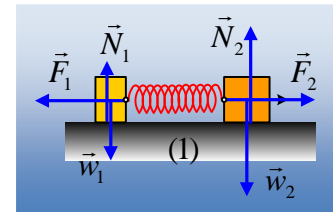
Όπου δεχτήκαμε την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική.

Κατά τη διάρκεια της κίνησης των σωμάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ , εξαιτίας των δυνάμεων που δέχονται από το συσπειρωμένο ελατήριο, έχουμε ένα μονωμένο σύστημα (δύο σώματα και ελατήριο), στο οποίο οι δυνάμεις που παράγουν έργο είναι συντηρητικές (δυνάμεις από το ελατήριο).

Αλλά τότε για το σύστημα των σωμάτων  $\Sigma_1$ - $\Sigma_2$  ισχύει η Α.Δ.Ο. από τη στιγμή που αφέθηκαν να κινηθούν, μέχρι ελάχιστα πριν την κρούση:

$$\vec{P}_{\text{αρ}} = \vec{P}_{\text{τελ}} \rightarrow$$

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$



$$v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2 = -\frac{2}{1} \cdot 1m/s = -2m/s$$

Πράγμα που σημαίνει ότι το  $\Sigma_1$  έχει ταχύτητα προς τα αριστερά, μέτρου 2m/s.

ii) Επίσης από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.) παίρνουμε:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k (\Delta \ell_1)^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} k (\Delta \ell_2)^2 \rightarrow$$

$$(\Delta \ell_2) = \pm \sqrt{(\Delta \ell_1)^2 - \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{k}} = \pm \sqrt{0,4^2 - \frac{1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2}{50}} m = \pm 0,2m$$

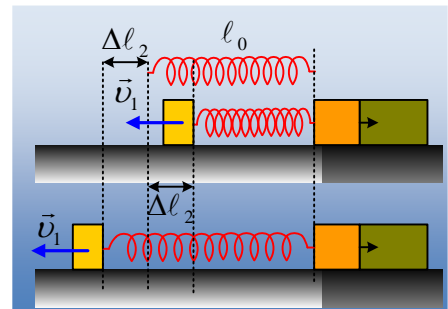
Πόσο είναι δηλαδή το μήκος του ελατηρίου τη στιγμή της κρούσης;

A) Μπορεί να είναι:  $\Delta \ell_2 = \ell_2 - \ell_0 \rightarrow$

$$\ell_2 = \ell_0 + \Delta \ell_2 = 0,7m + 0,2m = 0,9m$$

B) Αλλά και  $\ell_2 = \ell_0 + \Delta \ell_2 = 0,7m - 0,2m = 0,5m$

Όμως, θεωρώντας αμελητέες τις διαστάσεις των σωμάτων, συμπεραίνουμε ότι η απόσταση των σωμάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα είναι 0,5m ή 0,9m.



iii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο συσσωμάτωμα, αμέσως μετά την κρούση, όπου στο πάνω σχήμα το ελατήριο έχει συσπίρωση 0,2m, έχοντας μήκος 0,5m, ενώ στο κάτω το ελατήριο έχει μήκος 0,9m, συνεπώς επιμήκυνση 0,2m.

Σε κάθε περίπτωση το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου, που ασκείται στο συσσωμάτωμα, έχει μέτρο:

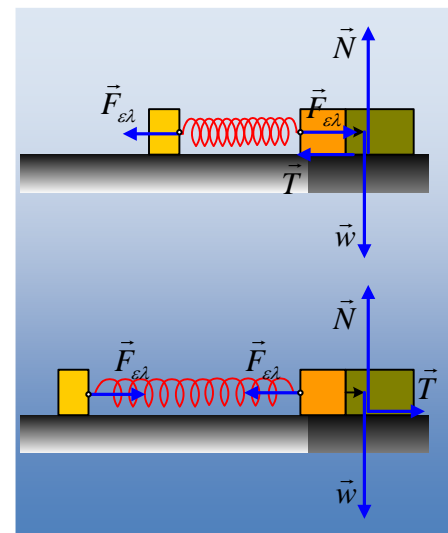
$$F_{ελ} = k \cdot \Delta \ell = 50 \cdot 0,2N = 10N.$$

Εξάλλου η μέγιστη στατική τριβή που μπορεί να ασκηθεί στο συσσωμάτωμα (η οριακή τριβή) έχει μέτρο:

$$T_{op} = \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot (m_2 + m_3)g = 0,2 \cdot 6 \cdot 10N = 12N.$$

Αυτό σημαίνει ότι αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα δεν θα κινηθεί, ενώ θα δεχτεί στατική τριβή μέτρου 10N.

iv) Για να αρχίσει η ολίσθηση θα πρέπει η τριβή να πάρει τη μέγιστη δυνατή τιμή της  $T_{op}$  που στην περίπτωση μας είναι ίση και με την τριβή ολίσθησης (λόγω ισότητας των δύο συντελεστών τριβής). Αλλά τότε και η δύναμη του ελατηρίου θα έχει μέτρο 12N. Όμως:



$$F_{ελ}=k \cdot \Delta \ell \rightarrow \Delta \ell = \frac{F_{ελ}}{k} = \frac{12}{50} = 0,24m .$$

Αλλά για όσο χρόνο το συσσωμάτωμα παραμένει ακίνητο, το σώμα  $\Sigma_1$  εκτελεί ΑΑΤ, γύρω από τη θέση ισορροπίας, που το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του. Αν λοιπόν η θέση του  $\Sigma_1$  αμέσως μετά την κρούση, έχει απομάκρυνση  $|x_1|=0,2m$ , ενώ τη στιγμή που θα αρχίσει η ολίσθηση  $|x_2|=0,24m$ , με χρήση της διατήρησης ενέργειας ταλάντωσης παίρνουμε:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 \rightarrow$$

$$|v_1'| = \sqrt{v_1^2 + \frac{k}{m_1} (x_1^2 - x_2^2)} = \sqrt{2^2 + \frac{50}{1} (0,2^2 - 0,24^2)} m/s \approx 1,8 m/s$$

[dmargaris@sch.gr](mailto:dmargaris@sch.gr)