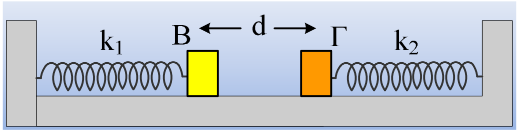
Άλλη μια κρούση κατά τη διάρκεια ταλάντωσης.



Τα σώμα Β και Γ με μάζες m_1=0,1kg και $m_2=2m_1$=0,2kg ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένα στα άκρα οριζόντιων ελατηρίων με σταθερές k_1=30N/m και $k_2=2k_1$= 60N/m αντίστοιχα, όπως στο σχήμα, όπου οι άξονες των δύο ελατηρίων συμπίπτουν. Τα σώματα που θεωρούνται υλικά σημεία, αμελητέων διαστάσεων απέχουν κατά d=0,3m. Ασκώντας κατάλληλες δυνάμεις στα σώματα, συσπειρώνουμε κάθε ελατήριο κατά 0,3m και αφήνουμε ταυτόχρονα τα σώματα να εκτελέσουν ΑΑΤ. Μετά από λίγο τα σώματα συγκρούονται πλαστικά, οπότε το συσσωμάτωμα εκτελεί μια νέα ΑΑΤ με σταθερά $D=k_1+k_2$.

Ζητούνται:

i) Η ενέργεια ταλάντωσης κάθε σώματος πριν την κρούση.

ii) Η ενέργεια ταλάντωσης του συσσωματώματος.

iii) Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας (η ενέργεια που εμφανίζεται ως αύξηση της θερμικής ενέργειας των σωμάτων, συν ενέργεια μόνιμης παραμόρφωσης των σωμάτων, συν ενέργεια ήχου…), που οφείλεται στην κρούση.

Απάντηση:

i) Το κάθε σώμα θα εκτελέσει ταλάντωση με πλάτος A=0,3m, συνεπώς με ενέργειες ταλάντωσης:

$$E_1 = \frac{1}{2}D_1A^2 = \frac{1}{2}k_1A^2 = \frac{1}{2}30\cdot 0{,}3^2\,J = 1{,}35J \text{ και}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}D_2A^2 = \frac{1}{2}k_2A^2 = \frac{1}{2}60\cdot 0{,}3^2\,J = 2{,}7J$$

ii) Οι δυο ταλαντώσεις πραγματοποιούνται με την ίδια περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m_1}{2k_1}}$ συνεπώς τα σώματα θα περάσουν ταυτόχρονα από τις θέσεις ισορροπίας και θα συγκρουσθούν, αφού επιμηκύνουν εξίσου τα δυο ελατήρια, στο μέσον της αρχικής απόστασης, σε απόσταση x_1=0,15m από τις θέσεις ισορροπίας κάθε επιμέρους ταλάντωσης. Εφαρμόζοντας την διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης για κάθε σώμα παίρνουμε (θετική η προς τα δεξιά κατεύθυνση):

$$E_1 = K_1 + U_1 \rightarrow \frac{1}{2}k_1A^2 = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = +\sqrt{\frac{k_1}{m_1}\left(A^2 - x_1^2\right)} = +\sqrt{\frac{30}{0{,}1}\left(0{,}3^2 - 0{,}15^2\right)}\ m/s = 4{,}5m/s$$

$$E_2 = K_2 + U_2 \rightarrow \frac{1}{2}k_2A^2 = \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \rightarrow$$

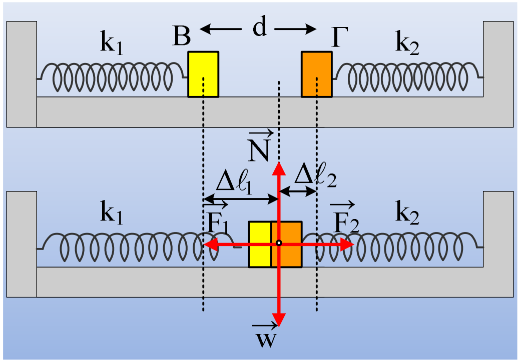
$$\upsilon_2 = -\sqrt{\frac{k_2}{m_2}\left(A^2 - x_2^2\right)} = -\sqrt{\frac{600}{2}\left(0{,}3^2 - 0{,}15^2\right)}\ m/s = -4{,}5 m/s$$

Εφαρμόζοντας την διατήρηση της ορμής για την κρούση παίρνουμε:

$$\vec{P}_{\pi\rho} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau} \rightarrow$$

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon_\kappa \rightarrow$$

$$\upsilon_\kappa = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}1\cdot 4{,}5 + 0{,}2\cdot(-4{,}5)}{0{,}1 + 0{,}2} m/s = -1{,}5 m/s$$



Παίρνοντας το συσσωμάτωμα στην θέση ισορροπίας του έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda 1} = F_{\varepsilon\lambda 2} \rightarrow k_1 \cdot \Delta\ell_1 = k_2 \cdot \Delta\ell_2 \rightarrow \Delta\ell_1 = 2\cdot\Delta\ell_2$$

Όμως $\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 = 0{,}3m \rightarrow$

$\Delta\ell_1 = 0{,}2m$ και $\Delta\ell_2 = 0{,}1m$

Οπότε τη στιγμή της κρούσης το συσσωμάτωμα βρίσκεται σε απομάκρυνση x=0,15m-0,2m=-0,05m (0,05m αριστερά της νέας θέσης ισορροπίας του).

Έτσι η ενέργεια της νέας ταλάντωσης θα είναι:

$$E_\tau = K + U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x^2 = \frac{1}{2}0{,}3\cdot 1{,}5^2 J + \frac{1}{2}90\cdot 0{,}05^2 J \approx 3{,}49 J$$

iii) Για την απώλεια της μηχανικής ενέργειας, θα πρέπει να δουλέψουμε όχι με τις ενέργειες ταλάντωσης, αλλά με τη βοήθεια της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα των δύο σωμάτων και των δύο ελατηρίων, όπου αν στη θέση της κρούσης το πρώτο ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta\ell_1$ και το δεύτερο $\Delta\ell_2$ θα έχουμε::

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = E_{\mu\eta\chi/\pi\rho\iota\nu} - E_{\mu\eta\chi/\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$$

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = \left(\frac{1}{2}k_1(\Delta\ell_1)^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2\right) + \left(\frac{1}{2}k_2(\Delta\ell_2)^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}k_1(\Delta\ell_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(\Delta\ell_2)^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_\kappa^2\right)$$

ή

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_\kappa^2 \quad ή$$

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2}0{,}1\cdot 4{,}5^2 J + \frac{1}{2}0{,}2\cdot 4{,}5^2 J - \frac{1}{2}0{,}3\cdot 1{,}5^2 J = 3{,}38 J$$

Σχόλιο:

Η παραπάνω απώλεια της μηχανικής ενέργειας δεν πρέπει να συγχέεται με τη μείωση της ενέργειας ταλαντώσεων (όπου είναι ένα μέρος της συνολικής μηχανικής ενέργειας, αλλά όχι η μηχανική ενέργεια!).

Η μείωση της ενέργειας που αναφέρεται στις ενέργειες των ταλαντώσεων θα είναι

$$\Delta E_{\tau\alpha\lambda} = (E_1 + E_2) - E_\tau = 1{,}35J + 2{,}7J - 3{,}4875J \approx 0{,}56J$$

Και προφανώς δεν έχει καμιά σχέση με την ζητούμενη απώλεια μηχανικής ενέργειας!

dmargaris@sch.gr