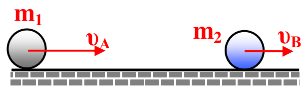
Που επιτυγχάνεται η μέγιστη παραμόρφωση;



Δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Κατά τη διάρκεια της κρούσης οι σφαίρες παραμορφώνονται παροδικά και μέρος της ενέργειας του συστήματος μετατρέπεται σε δυναμική ελαστική ενέργεια λόγω της παραμόρφωσης των σωμάτων. Κατά την κρούση, όσο υφίσταται η παραμόρφωση τα κέντρα μάζας των σωμάτων πλησιάζουν μεταξύ τους και αυξάνεται η ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης. Όταν τα κέντρα μάζας των σωμάτων απέχουν ελάχιστα μεταξύ τους μεγιστοποιείται η δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης. Ενώ όταν τα σώματα απομακρύνονται και τείνουν να αποχωριστούν ελαττώνεται η ενέργεια παραμόρφωσης. Μόλις η κρούση τελειώσει και τα σώματα δεν βρίσκονται σε επαφή έχουν ανακτήσει το αρχικό τους σχήμα και πλέον το σύστημα δεν έχει καθόλου ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης.
Να αποδειχθεί ότι η μέγιστη ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης επιτυγχάνεται όταν οι σφαίρες έχουν ίσες ταχύτητες.

Απάντηση

Από την αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο.) στην αρχή και σε μια τυχαία θέση στη διάρκεια της κρούσης προκύπτει:

$$\vec{P}_{αρχ}=\vec{P}_{τελ}\xrightarrow{\text{αλγεβρικά}}P_{αρχ}=P_1+P_2\Rightarrow P_{αρχ}=m_1υ_1+m_2υ_2 \quad (1α)$$

$$\text{ή } υ_1=\frac{P_{αρχ}-m_2υ_2}{m_1} \quad (1β)$$

Από την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας στην αρχή και σε μια τυχαία θέση στη διάρκεια της κρούσης προκύπτει:

$$K_{αρχ}=K_{τελ}+U_{ελ.}\Rightarrow U_{ελ.}=K_{αρχ}-K_1-K_2\Rightarrow$$

$$U_{ελ.}=K_{αρχ}-\frac{1}{2}m_1υ_1^2-\frac{1}{2}m_2υ_2^2\overset{(1β)}{\Rightarrow}$$

$$U_{ελ.}=K_{αρχ}-\frac{1}{2}m_1\left(\frac{P_{αρχ}-m_2υ_2}{m_1}\right)^2-\frac{1}{2}m_2υ_2^2\Rightarrow$$

$$U_{ελ.}=K_{αρχ}-\frac{1}{2}m_1\left(\frac{P_{αρχ}^2-2P_{αρχ}\cdot m_2\cdot υ_2+m_2^2\cdot υ_2^2}{m_1^2}\right)-\frac{1}{2}m_2υ_2^2\Rightarrow$$

$$U_{ελ.}=K_{αρχ}-\frac{1}{2}m_1\frac{P_{αρχ}^2}{m_1^2}+\frac{1}{2}m_1\frac{2P_{αρχ}\cdot m_2\cdot υ_2}{m_1^2}-\frac{1}{2}m_1\frac{m_2^2\cdot υ_2^2}{m_1^2}-\frac{1}{2}m_2υ_2^2\quad\Rightarrow$$

$$U_{ελ.}=K_{αρχ}-\frac{P_{αρχ}^2}{2m_1}+\frac{P_{αρχ}\cdot m_2\cdot υ_2}{m_1}-\frac{m_2^2\cdot υ_2^2}{2m_1}-\frac{1}{2}m_2υ_2^2\quad\Rightarrow$$

$$U_{ελ.}=\underbrace{-\left(\frac{m_2^2+m_1\cdot m_2}{2m_1}\right)}_{α}υ_2^2+\underbrace{\frac{P_{αρχ}\cdot m_2}{m_1}}_{β}υ_2+\underbrace{\left(K_{αρχ}-\frac{P_{αρχ}^2}{2m_1}\right)}_{γ}\quad(2)$$

Η παραπάνω σχέση είναι ένα τριώνυμο 2ου βαθμού το οποίο παρουσιάζει μέγιστο μιας και ο συντελεστής του $υ_2^2$ είναι αρνητικός αριθμός. Από τη θεωρία, (Άλγεβρα 1ης Λυκείου) η μέγιστη τιμή του τριωνύμου είναι το σημείο (-β/2α, -Δ/4α). Έτσι η τιμή της ταχύτητας υ2 που μεγιστοποιείται η ελαστική δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης είναι:

$$\upsilon_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\dfrac{P_{\alpha\rho\chi}\cdot m_2}{m_1}}{-2\dfrac{m_2^2 + m_1\cdot m_2}{2m_1}} = \frac{P_{\alpha\rho\chi}\cdot m_2}{m_2^2 + m_1\cdot m_2} = \frac{P_{\alpha\rho\chi}}{m_1 + m_2} \Rightarrow P_{\alpha\rho\chi} = m_1\upsilon_2 + m_2\upsilon_2 \ (3\alpha)$$

$$\text{ή } \upsilon_2 = \frac{P_{\alpha\rho\chi}}{m_1 + m_2} \quad (3\beta)$$

Η σχέση (1α) με τη βοήθεια της σχέσης (3α) δίνει:

$$(1\alpha)=(3\alpha) \Rightarrow m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_2 + m_2\upsilon_2 \Rightarrow m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_2$$

Η τιμή των ταχυτήτων είναι αυτή που δίνει η σχέση (3β) όπου αντικαθιστώντας την στην (1β) απλά επιβεβαιώνεται η τιμή αυτή και για την υ1.

$$(1\beta) \overset{(3\beta)}{\Rightarrow} \upsilon_1 = \frac{P_{\alpha\rho\chi} - m_2\dfrac{P_{\alpha\rho\chi}}{m_1 + m_2}}{m_1} = \frac{\dfrac{P_{\alpha\rho\chi}m_1 + P_{\alpha\rho\chi}m_2 - m_2P_{\alpha\rho\chi}}{m_1 + m_2}}{m_1} = \frac{P_{\alpha\rho\chi}m_1}{m_1(m_1 + m_2)} \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \frac{P_{\alpha\rho\chi}}{m_1 + m_2}$$

Έτσι όταν τα σώματα έχουν ίδιες ταχύτητες τότε μεγιστοποιείται η ελαστική δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης και τα κέντρα μάζας τους απέχουν ελάχιστα μεταξύ τους.

Μάλιστα η τιμή της $U_{\varepsilon\lambda,max}$= -Δ/4α προκύπτει ίση με $U_{\varepsilon\lambda,\max} = K_{\alpha\rho\chi} - \dfrac{P_{\alpha\rho\chi}^2}{2(m_1 + m_2)}$

Σχόλια

1. Η ισότητα των ταχυτήτων δεν αφορά μόνο τα μέτρα αλλά και την κατεύθυνση αυτών.
2. Προφανώς θα μπορούσαμε να δουλέψουμε και με την εύρεση ακροτάτων της $U_{\varepsilon\lambda.}$ της σχέσης (2).

$$U'_{\varepsilon\lambda.}(\upsilon_2) = -\frac{m_2^2 + m_1\cdot m_2}{m_1}\upsilon_2 + \frac{P_{\alpha\rho\chi}\cdot m_2}{m_1} \rightarrow$$

$$U'_{\varepsilon\lambda.}(\upsilon_2) = 0 \rightarrow \frac{m_2^2 + m_1\cdot m_2}{m_1}\upsilon_2 = \frac{P_{\alpha\rho\chi}\cdot m_2}{m_1} \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \frac{P_{\alpha\rho\chi}\cdot m_2}{m_2^2 + m_1\cdot m_2} \rightarrow \upsilon_2 = \frac{P_{\alpha\rho\chi}}{m_1 + m_2}$$

Χ. Αγριόδημας
chagriodimas@yahoo.gr
chagriodimas@gmail.com