

Υπολογίζοντας τον χρόνο

Τερλεμές Σπύρος

spyrosssterlemes@gmail.com

24-1-2021

Εφόσον το ζητούμενο είναι να βρούμε τον χρόνο ας τον υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας έτοιμη την επιτάχυνση η οποία είναι:

$$\ddot{y} = g \frac{H-y}{y} = gH \frac{1}{y} - g$$

(1)

Πολλαπλασιάζουμε με \dot{y} και προκύπτει:

$$\left(\frac{1}{2}\dot{y}^2\right)' = (gH\ln y - gy)' \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{y}^2 = gH\ln y - gy + C$$

(2)

Αρχικά η ταχύτητα είναι μηδέν και το y είναι h , οπότε η σταθερά C είναι:

$$C = gh - gH\ln h$$

(3)

Έτσι λοιπόν η σχέση (2) γίνεται:

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = gH\ln\left(\frac{y}{h}\right) + g(h-y)$$

Οπότε:

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2g} \sqrt{H\ln\left(\frac{y}{h}\right) + h-y}$$

(4)

Έτσι ο ζητούμενος χρόνος είναι:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_h^H \frac{1}{\sqrt{H\ln\left(\frac{y}{h}\right) + h-y}} dy$$

(5)