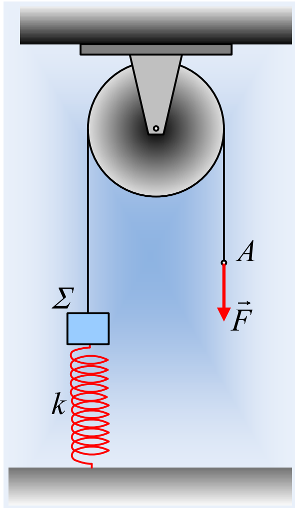
Μια μεταβλητή δύναμη επιταχύνει ένα σύστημα.



Ένα σώμα Σ μάζας m=2kg ηρεμεί στο πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=200N/m. Δένουμε το σώμα Σ στο άκρο ενός αβαρούς νήματος, το οποίο περνάμε από μια τροχαλία και στο ελεύθερο άκρο του Α, ασκούμε μια κατακόρυφη δύναμη F, όπως στο διπλανό σχήμα. Το μέτρο της δύναμης F μεταβάλλεται με την μετατόπιση του άκρου Α, σύμφωνα με τη σχέση $F = 32 - 40y$ (S.I.), ενώ το νήμα αφήνεται, μόλις το άκρο Α μετατοπισθεί κατά 0,2m. Η μάζα της τροχαλίας είναι Μ=4kg, ενώ το νήμα δεν γλιστρά στο αυλάκι της, στη διάρκεια της εξάσκησης της δύναμης.

i) Να υπολογιστεί η αρχική επιτάχυνση του σώματος Σ.

ii) Να βρεθεί η ενέργεια που μεταφέρεται στο σύστημα μέσου του έργου της ασκούμενης δύναμης, μέχρι τη στιγμή t_1 που το σημείο Α έχει κατέβει κατά y_1=0,1m.

iii) Να υπολογιστούν τη στιγμή t_1:

α) οι κινητικές ενέργειες του σώματος Σ και της τροχαλίας.

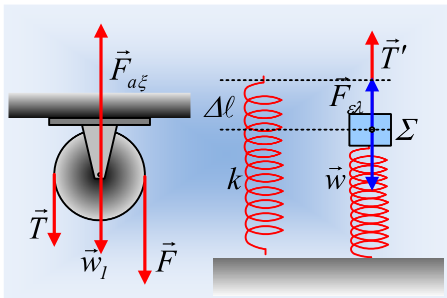
β) οι αντίστοιχοι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής τους ενέργειας.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας, ως προς τον άξονά της, αν έχει ακτίνα R=0,2m, και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος Σ.

iv) Η μέγιστη κινητική ενέργεια του σώματος Σ, μετά την κατάργηση της δύναμης F.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της I= ½ MR^2 και η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ, το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά $Δ\ell_0$ ασκώντας δύναμη στο σώμα με φορά προς τα πάνω. Από την αρχική ισορροπία του σώματος Σ, έχουμε:

$$ΣF=0 \rightarrow F_{ελ}=w \rightarrow kΔ\ell_0 = mg$$

$$Δ\ell_0 = \frac{mg}{k} = \frac{2\cdot 10}{200} m = 0,1m$$

Μόλις τραβήξουμε το άκρο του νήματος, στα σώματα ασκούνται οι δυνάμεις που εμφανίζονται στο διπλανό σχήμα, όπου μέσω του νήματος ασκείται δύναμη μέτρου F στην τροχαλία. Έτσι από το 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα παίρνουμε για τη στιγμή t=0, αμέσως μόλις ασκηθεί η δύναμη F:

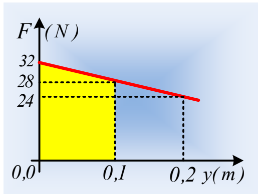
Σώμα Σ: $\Sigma F = m\cdot a \rightarrow T' + (k\Delta\ell - mg) = ma$ (1)

Τροχαλία: $\Sigma\tau = I\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot R - T\cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F - T = \frac{1}{2} MR\cdot a_{\gamma\omega\nu}$ (2)

Αλλά αφού το νήμα δεν γλιστράει στο αυλάκι της τροχαλίας, κάθε σημείο του νήματος έχει την ίδια ταχύτητα με τα σημεία της περιφέρειας της τροχαλίας, δηλαδή $a = a_{\gamma\omega\nu}R$. Εξάλλου αφού το νήμα είναι αβαρές T=T΄ και με αντικατάσταση στην (2) και πρόσθεση με την (1), έχουμε:

$$F = ma + \frac{1}{2}Ma \rightarrow a = \frac{F}{m + \frac{1}{2}M} = \frac{32}{2+2} m/s^2 = 8 m/s^2.$$

ii) Τη στιγμή t_1 που το σημείο Α έχει κατέβει κατά 0,1m, το σώμα Σ έχει ανέβει κατά 0,1m και το ελατήριο έχει αποκτήσει το φυσικό του μήκος. Κάνοντας το διάγραμμα του μέτρου της δύναμης F σε συνάρτηση με τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της, σημείο Α, το έργο που παράγει η δύναμη, για μετατόπιση 0,1m, είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν του τραπεζίου με κίτρινο χρώμα, όπου για y=0,1m, F_1=28N.



$$W_F = \frac{32+28}{2} 0{,}1 J = 3J$$

iii) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, για κάθε σώμα, ανάμεσα στην αρχική θέση και τις θέσεις τη στιγμή t_1:

Σώμα Σ: $K_{\Sigma 2} - K_{\Sigma 1} = W_w + W_{F\varepsilon\lambda} + W_{T'} \rightarrow$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - 0 = -mgy_1 + \left(\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 - 0\right) + W_{T'} \quad (3)$$

Τροχαλία: $K_{\tau 2} - K_{\tau 1} = W_{w1} + W_{F\alpha\xi} + W_T + W_F \rightarrow$

$$\frac{1}{2}I\omega_1^2 = 0 = 0 + 0 + W_T + W_F \quad (4)$$

Αλλά $\upsilon_1 = \omega_1 R$, ενώ $W_{T'} = -W_T$ και με πρόσθεση των (3) και (4) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\cdot\omega_1^2 = -mgy_1 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 + W_F \rightarrow$$

$$\left(m + \frac{1}{2}M\right)\upsilon_1^2 = 2W_F + k(\Delta\ell)^2 - 2mgy_1 \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2W_F + k(\Delta\ell)^2 - 2mgy_1}{\left(m + \frac{1}{2}M\right)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3 + 200\cdot 0{,}1^2 - 2\cdot 2\cdot 10\cdot 0{,}1}{2 + \frac{1}{2}4}} m/s = 1m/s.$$

Εξάλλου από τις εξισώσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$F - mg = ma_1 + \frac{1}{2}Ma_1 \rightarrow a_1 = \frac{F - mg}{m + \frac{1}{2}M} = \frac{28-20}{2+2} m/s^2 = 2m/s^2.$$

Με βάση αυτά έχουμε:

α) Κινητικές ενέργειες:

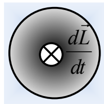
Σώμα Σ: $K_1 = \frac{1}{2} m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 1^2 J = 1J$.

Τροχαλία: $K_\tau = \frac{1}{2} I\omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MR^2 \omega_1^2 = \frac{1}{4} M\upsilon_1^2 = \frac{1}{4} 4 \cdot 1^2 J = 1J$

β) $\frac{dK_1}{dt} = (\Sigma F) \cdot \upsilon = ma \cdot \upsilon = 2 \cdot 2 \cdot 1J/s = 4J/s$

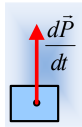
$$\frac{dK_\tau}{dt} = (\Sigma\tau) \cdot \omega = Ia_{\gamma\omega\nu} \cdot \omega = \frac{1}{2} MRa_{\gamma\omega\nu} \cdot R\omega = \frac{1}{2} Ma \cdot \upsilon = \frac{1}{2} 4 \cdot 2 \cdot 1J/s = 4J/s$$

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της τροχαλίας ως προς τον άξονά της, είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδό της με φορά προς τα μέσα και μέτρο:



$$\frac{dL_\tau}{dt} = \Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2} MR^2 a_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2} MRa \rightarrow$$

$$\frac{dL_\tau}{dt} = \frac{1}{2} MRa = \frac{1}{2} 4 \cdot 0{,}2 \cdot 2kgm^2/s^2 = 0{,}8kgm^2/s^2 .$$



Εξάλλου ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος Σ, έχει την κατεύθυνση της επιτάχυνσης (διάνυσμα κατακόρυφο με φορά προς τα πάνω) και μέτρο:

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = ma = 2 \cdot 2kgm/s^2 = 4kgm/s^2 .$$

iv) Το άκρο Α του νήματος αφήνεται όταν κατέβει κατά 0,2m, πράγμα που σημαίνει ότι τη στιγμή αυτή και το σώμα Σ έχει ανέβει κατά 0,2m, έχοντας επιμηκύνει το ελατήριο κατά $\Delta\ell_1 = 0{,}1m = \Delta\ell_0$. Μέχρι τη θέση αυτή το έργο της δύναμης υπολογίζεται από το αντίστοιχο εμβαδόν του τραπεζίου με ύψος 0,2m, όπου για y=0,2m, F_2=24N, οπότε:

$$W_{F2} = \frac{32+24}{2} 0{,}2J = 5{,}6J$$

Δουλεύοντας όπως και στο ii) ερώτημα με χρήση του Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

Σώμα Σ: $K_{\Sigma 2} - K_{\Sigma 1} = W_w + W_{F\varepsilon\lambda} + W_{T'} \rightarrow$

$$\frac{1}{2} m\upsilon_2^2 - 0 = -mgy_2 + \left(\frac{1}{2} k(\Delta\ell_0)^2 - \frac{1}{2} k(\Delta\ell_1)^2 \right) + W_{T'} \quad (3^\alpha)$$

Τροχαλία: $K_{\tau 2} - K_{\tau 1} = W_{w1} + W_{F\alpha\xi} + W_T + W_{F2} \rightarrow$

$$\frac{1}{2} I\omega_2^2 = 0 = 0 + 0 + W_T + W_{F2} \quad (4^\alpha)$$

Αλλά $\upsilon_1=\omega_1 R$, ενώ $W_{T'}= -W_T$ και με πρόσθεση των (3^α) και (4^α) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} MR^2 \cdot \omega_2^2 = -mgy_2 + W_{F2} \rightarrow$$

$$\left(m+\frac{1}{2}M\right)\upsilon_2^2=2W_{F2}-2mgy_2\rightarrow$$

$$\upsilon_2^2=\frac{2W_{F2}-2mgy_2}{m+\frac{1}{2}M}=\frac{2\cdot 5{,}6-2\cdot 2\cdot 10\cdot 0{,}2}{2+2}m^2/s^2=0{,}8m^2/s^2$$

Αλλά τη στιγμή αυτή το σώμα Σ, ξεκινά να εκτελεί μια αατ, απέχοντας από την θέση ισορροπίας του κατά y_2 και από τη διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης παίρνουμε:

$$E_\tau=\frac{1}{2}ky_2^2+\frac{1}{2}m\upsilon_2^2=\frac{1}{2}200\cdot 0{,}2^2J+\frac{1}{2}2\cdot 0{,}8J=4{,}8J$$

Συνεπώς και η μέγιστη κινητική ενέργεια που θα αποκτήσει περνώντας από τη θέση ισορροπίας του θα είναι ίση με 4,8J.

Σχόλια:

1) Στο σύστημα σώμα Σ-τροχαλία, ενέργεια μεταφέρεται μέσω των έργων της ασκούμενης δύναμης F και της δύναμης του ελατηρίου. Έτσι στο ερώτημα iii) θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τη διατήρηση της ενέργειας (και όχι το Θ.Μ.Κ.Ε.) ως εξής:

   Στο σύστημα δίνεται ενέργεια: W_F=3J και $W_{Fελ}$= ½ k·$(Δl)^2$= ½ 200·$0{,}1^2$J=1J

   Η ενέργεια αυτή εμφανίζεται ως αύξηση της δυναμικής ενέργειας του σώματος Σ, ΔU=mgy_1=2J και ως κινητική K=K_1+$K_τ$= ½ $mυ_1^2$ + ½ $Iω_1^2$.

   Έτσι από Α.Δ.Ε. παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+\frac{1}{2}I\cdot\omega_1^2+mgy_1=\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2+W_F....$$

2) Υπολογίζοντας το μέτρο της τάσης του νήματος Τα, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τους ρυθμούς του iii) ερωτήματος, χρησιμοποιώντας τις δυνάμεις και τις ροπές και όχι τις επιταχύνσεις και γωνιακές επιταχύνσεις. Για παράδειγμα:

$$\frac{dL_\tau}{dt}=\Sigma\tau=F\cdot R-T\cdot R\ .....$$

dmargaris@gmail.com