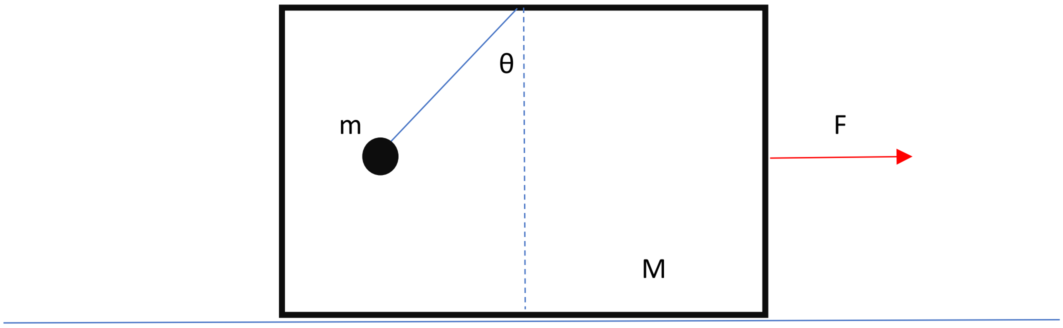
Ελεύθερο σύστημα εκκρεμούς και διαστατικού σώματος

Τερλεμές Σπύρος
spyrosssterlemes@gmail.com
8-12-2020

Έστω ένα εκκρεμές σώματος m, δεμένο στην άλλη του άκρη στην μέση της άνω βάσης ενός ορθογωνίου σώματος M. Το σώμα M έχει ύψος l και είναι ομογενές. Το σώμα m είναι ακίνητο στη αρχική θέση ισορροπίας του. Ξεκινάμε να ασκούμε σταθερή δύναμη F προς τα δεξιά στο σώμα M. Στην ανάλυση μελετάω την κίνηση του συστήματος.



Το κέντρο μάζας (X,Y) του συστήματος των σωμάτων έχει στον άξονα x'x συνιστώσα ίση με:

$$X = \frac{(mx_1 + Mx_2)}{m+M} \Rightarrow \dot{X} = \frac{m\dot{x_1} + M\dot{x_2}}{m+M}$$

(1)

Όπου $x_1 \; και \; x_2$ οι οριζόντιες συντεταγμένες των σωμάτων m και M αντίστοιχα. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$x_2 = x_1 + lsin\theta \Rightarrow \dot{x_2} = \dot{x_1} + lcos\theta\dot{\theta}$$

(2)

Έτσι λοιπόν από τις σχέσεις (1) και (2) μπορούμε να εκφράσουμε τις παραγώγους των οριζόντιων συντεταγμένων κάθε σώματος, ως συνάρτηση της οριζόντιας ταχύτητας του κέντρου μάζας και της γωνιακής ταχύτητας του m:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \dot{X} - \dfrac{Ml}{m+M}cos\theta\dot{\theta} \\ \dot{x_2} = \dot{X} + \dfrac{ml}{m+M}cos\theta\dot{\theta} \end{cases}$$

(3)

Επίσης είναι:

$$y_1 = l - lcos\theta \Rightarrow \dot{y}_1 = lsin\theta\dot{\theta}$$

(4)

Η συνάρτηση Lagrange του συστήματος είναι:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2 + mglcos\theta + \int F\, dx_2$$

(5)

Όπου το ολοκλήρωμα της F δίνει το αντίθετο του δυναμικού της, και εφόσον η F είναι σταθερή δύναμη τότε έχουμε ολοκληρώνοντας την (3):

$$\int Fdx_2 = F\left(X + \frac{ml}{m+M}sin\theta\right)$$

(6)

Έτσι αντικαθιστώντας την (3), (4) και (6) στην Lagragian έχουμε:

$$L = \frac{1}{2}(m+M)\dot{X}^2 + \frac{ml^2}{2}\left[\frac{M}{m+M}\cos^2\theta + \sin^2\theta\right]\dot{\theta}^2 + F\left(X + \frac{mlsin\theta}{m+M}\right) + mglcos\theta$$

(7)

Ισοδύναμα:

$$L = \frac{1}{2}(m+M)\dot{X}^2 + \frac{ml^2}{2(m+M)}(M + msin^2\theta)\dot{\theta}^2 + FX + \frac{Fml}{m+M}sin\theta + mglcos\theta$$

(8)

Από τις εξισώσεις Euler-Lagrange έχουμε αρχικά:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}\right) = \frac{\partial L}{\partial X} \Rightarrow (m+M)\ddot{X} = F$$

(9)

Η σχέση (9) εκφράζει ουσιαστικά τον 2ο νευτώνειο νόμο για το κέντρο μάζας του συστήματος.

Επίσης για την γενικευμένη συντεταγμένη θ, έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{m^2l^2}{m+M}sin\theta cos\theta\dot{\theta}^2 + \frac{Fml}{m+M}cos\theta - mglsin\theta$$

(10)

Για την παράγωγο της θ έχουμε την μερική παράγωγο της Lagragian:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{ml^2}{m+M}(M + msin^2\theta)\dot{\theta}$$

(11)

Παραγωγίζουμε χρονικά την (11) και έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{ml^2}{m+M}(M + msin^2\theta)\ddot{\theta} + \frac{2m^2l^2}{m+M}sin\theta cos\theta\dot{\theta}^2$$

(12)

Θα πρέπει όμως να ισχύει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

(13)

Αντικαθιστώντας την (11) και (13) παίρνουμε:

$$\frac{ml^2}{m+M}\left[(M + \sin^2\theta)\ddot{\theta} + 2msin\theta cos\theta\dot{\theta}^2\right] = \frac{m^2l^2}{m+M}sin\theta cos\theta\dot{\theta}^2 + \frac{Fml}{m+M}cos\theta - mglsin\theta$$

(14)

Κάνουμε πράξεις και η (14) απλοποιείται στην μορφή:

$$\frac{ml^2}{m+M}\left[(M + msin^2\theta)\ddot{\theta} + msin\theta cos\theta\dot{\theta}^2\right] = \frac{Fml}{m+M}cos\theta - mglsin\theta$$

(15)

Έστω ότι έχουμε την συνάρτηση f με τύπο:

$$f(\theta, t) = (M + msin^2\theta)\ddot{\theta} + msin\theta cos\theta\dot{\theta}^2$$

(16)

Ολοκληρώνουμε την f πολλαπλασιάζοντας με $\dot{\theta}$ και προκύπτει:

$$\dot{\theta}\, f = \frac{1}{2}(M + msin^2\theta)\dot{\theta}^2$$

(17)

Οπότε πολλαπλασιάζοντας με $\dot{\theta}$ την (16) προκύπτει:

$$\frac{ml^2}{2(m+M)}(M + msin^2\theta)\dot{\theta}^2 = \frac{Fml}{m+M}sin\theta + mglcos\theta + C$$

(18)

Οπότε τελικά:

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{2(m+M)}{ml^2}\left[\frac{\frac{Fml}{(m+M)}sin\theta + mgl(cos\theta - 1)}{(M + msin^2\theta)}\right]}$$

(19)

Αφού την t=0 είναι θ=0, είναι C=-mg. Η σχέση (19) εκφράζει την γωνιακή ταχύτητα του σώματος m συναρτήσει της γωνιακής εκτροπής θ. Στην ειδική περίπτωση που M=m είναι:

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{2Flsin\theta + 4mg(cos\theta - 1)}{ml(1+\sin^2\theta)}}$$

(20)

Παρατηρούμε επίσης ότι το εκκρεμές αποκτά την μέγιστη εκτροπή όταν η παράγωγος της γωνίας μηδενίζεται, άρα αρκεί να μηδενίσουμε την σχέση (19). Δηλαδή πρέπει:

$$\frac{Fml}{m+M}sin\theta + mgl(cos\theta - 1) = 0 \Rightarrow sin\theta = \frac{(m+M)g}{F}(1 - cos\theta)$$

(21)

Άρα:

$$1 - \cos^2\theta = \frac{(m+M)^2g^2}{F^2}(1 - 2cos\theta + \cos^2\theta) \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{(m+M)^2g^2}{F^2}\right)\cos^2\theta - \frac{2(m+M)^2g^2}{F^2}cos\theta + \frac{(m+M)^2g^2}{F^2} - 1 = 0$$

(22)

Η (22) είναι δεύτερου βαθμού, την λύνουμε και βρίσκουμε την μέγιστη εκτροπή, λαμβάνοντας υπόψιν τα φράγματα του συνημίτονου (-1 και 1).