

### Δίνοντας τρεις απαντήσεις, σε γνωστή ερώτηση.....

Ένας τροχός αφήνεται σε ένα κεκλιμένο επίπεδο, οπότε κυλιέται (χωρίς να ολισθαίνει) και μετά από λίγο έχει κατέλθει κατά  $h$ , έχοντας ταχύτητα κέντρου μάζας  $v_{cm}$ .

i) Η επιτάχυνση του κέντρου  $O$  του τροχού έχει μέτρο:

$$\alpha) \alpha_{cm} < g \cdot \eta \mu \theta, \quad \beta) \alpha_{cm} = g \cdot \eta \mu \theta, \quad \gamma) \alpha_{cm} > g \cdot \eta \mu \theta$$

ii) Η ταχύτητα  $v_{cm}$  έχει μέτρο:

$$\alpha) v_{cm} < \sqrt{2gh}, \quad \beta) v_{cm} = \sqrt{2gh}, \quad \gamma) v_{cm} > \sqrt{2gh}.$$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού γύρω από τον άξονα περιστροφής του  $I = \frac{1}{2} MR^2$ .

**Απάντηση:**

#### 1) Πρώτη εκδοχή:

i) Με βάση το διπλανό σχήμα έχουμε:

$$\Sigma F_x = M \cdot \alpha_{cm} \rightarrow Mg \cdot \eta \mu \theta - T = M \cdot \alpha_{cm} \quad (1)$$

$$\text{Και } \Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} MR \alpha_{\gamma\omega\nu} \xrightarrow{\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R} T = \frac{1}{2} M \alpha_{cm} \quad (2)$$

Από (1) και (2) παίρνουμε:

$$Mg \cdot \eta \mu \theta = M \alpha_{cm} + \frac{1}{2} M \alpha_{cm} \rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = \frac{2}{3} g \cdot \eta \mu \theta$$

Σωστή η α) πρόταση.

ii) Εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ παίρνουμε:

$$Mgh = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \rightarrow$$

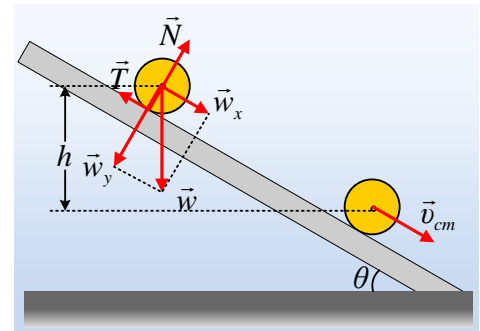
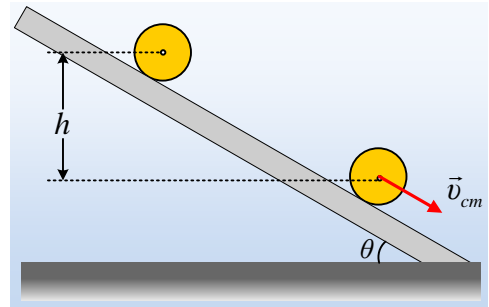
$$Mgh = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

Αλλά  $v_{cm} = \omega \cdot R$  οπότε,

$$Mgh = \frac{3}{4} M v_{cm}^2 \rightarrow$$

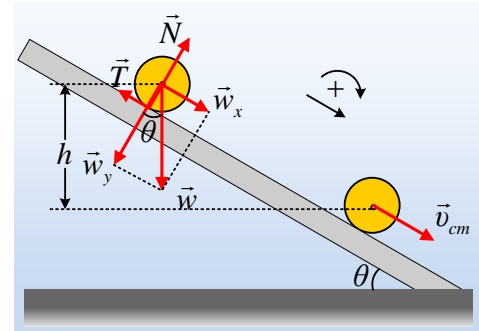
$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3} gh} < \sqrt{2gh}$$

Σωστή η α) πρόταση.



## 2) Δεύτερη εκδοχή.

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό, ο οποίος αφού κυλίεται, πρέπει να δέχεται στατική τριβή με φορά προς τα πάνω, η ροπή της οποίας θα προκαλέσει την γωνιακή επιτάχυνση του τροχού και συνεπώς την περιστροφή του. Εξάλλου, η γωνία που σχηματίζει το βάρος με την κάθετη προς το επίπεδο συνιστώσα  $w_x$  είναι ίση με την κλίση του κεκλιμένου επιπέδου (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές).



Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τη μεταφορική και την στροφική κίνηση του τροχού, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = M \cdot a_{cm} \rightarrow Mg \cdot \eta \mu \theta - T = M \cdot a_{cm} \quad (1)$$

$$\text{Και } \Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T = \frac{1}{2} MR \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Αλλά αφού ο τροχός κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει)  $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$  και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$T = \frac{1}{2} M a_{cm} \quad (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) θα πάρουμε:

$$Mg \cdot \eta \mu \theta = M a_{cm} + \frac{1}{2} M a_{cm} \rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{2}{3} g \cdot \eta \mu \theta$$

Σωστή η α) πρόταση.

- ii) Κατά την κίνηση του τροχού, η στατική τριβή δεν παράγει έργο, αφού δεν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της. Αλλά τότε, η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, δύναμη συντηρητική, οπότε η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή. Ορίζοντας λοιπόν ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την χαμηλότερη θέση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, παίρνουμε:

$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \rightarrow$$

$$Mgh = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \rightarrow$$

$$Mgh = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

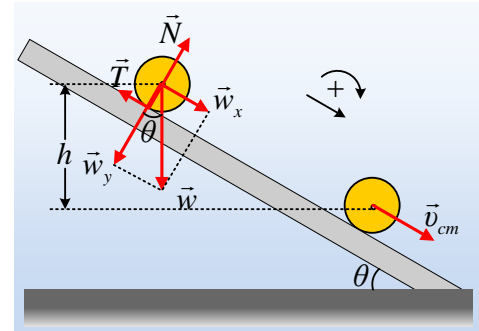
$$\text{Αλλά } v_{cm} = \omega \cdot R \text{ οπότε, } Mgh = \frac{3}{4} M v_{cm}^2 \rightarrow$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3} gh} < \sqrt{2gh}$$

Σωστή η α) πρόταση.

### 3) Τρίτη εκδοχή.

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό, ο οποίος αφού κυλιέται πρέπει να δέχεται στατική τριβή με φορά προς τα πάνω, η ροπή της οποίας, θα προκαλέσει την γωνιακή επιτάχυνση του τροχού και συνεπώς την περιστροφή του. Εξάλλου η γωνία που σχηματίζει το βάρος με την κάθετη προς το επίπεδο συνιστώσα  $w_x$  είναι ίση με την κλίση του κεκλιμένου επιπέδου (γωνίες με κάθετες πλευρές).



Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τη μεταφορική κίνηση του τροχού, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = M \cdot a_{cm} \rightarrow Mg \cdot \eta \mu \theta - T = M \cdot a_{cm}$$

$$a_{cm} = g \cdot \eta \mu \theta - \frac{T}{M} < g \cdot \eta \mu \theta$$

Σωστή η α) πρόταση.

- ii) Αν ο τροχός εκτελούσε μόνο μεταφορική κίνηση (λείο επίπεδο), η μείωση της δυναμικής ενέργειας του τροχού θα εμφανιζόταν ως αύξηση της κινητικής ενέργειάς του και οριζώντας, ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την χαμηλότερη θέση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, θα είχαμε:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$Mgh = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \rightarrow$$

$$v_{cm} = \sqrt{2gh}$$

Όμως στην περίπτωση μας εμφανίζεται στατική τριβή, οπότε ο τροχός εκτελεί σύνθετη κίνηση και ένα μέρος της αρχικής δυναμικής ενέργειας θα εμφανιστεί ως κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής. Αλλά τότε η κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης θα ήταν μικρότερη και κατά συνέπεια και η ταχύτητα του κέντρου μάζας, θα ήταν μικρότερη από  $\sqrt{2gh}$ .

Σωστή η α) πρόταση.

### Σχόλια:

- Η πρώτη εκδοχή, είναι αυτή που συνήθως γράφουν οι μαθητές μας. Μια στεγνή παράθεση μαθηματικών σχέσεων, χωρίς καμιά εξήγηση.
- Η ίδια λύση είναι η δεύτερη εκδοχή, «ντυμένη» με τις απαραίτητες επεξηγήσεις που καθιστούν την «απάντηση» μια ουσιαστική απάντηση, η οποία διεκδικεί το σύνολο των μορίων, σε οποιαδήποτε βαθμολόγηση.
- Η τρίτη εκδοχή, είναι η απάντηση κάποιου, ο οποίος δεν σκύβει το κεφάλι και αρχίζει να γράφει κάτι

που το ξέρει από παλιά... Σκέφτεται τι του ζητάνε, βλέπει ότι δεν είναι ανάγκη να κάνει πράξεις και να υπολογίσει τα μεγέθη που αναφέρονται και χρησιμοποιώντας τη θεωρία που γνωρίζει, οδηγείται σε απάντηση, στο συντομότερο χρόνο, χωρίς να αφήνει κενά δικαιολόγησης.

////////////////////////////////////

Φίλοι μαθητές-υποψήφιοι,

αυτή είναι η τελευταία ανάρτηση για σας.

Προσπάθησα να δείξω πώς πρέπει να απαντήσετε σε ένα γνωστό ερώτημα.

Μην γράφετε μόνο ένα σύνολο μαθηματικών σχέσεων.

Δικαιολογήστε την απάντησή σας και κυρίως «έχετε τα μάτια σας ανοικτά»...

Εύχομαι καλή επιτυχία στις εξετάσεις σας,

σε συμφωνία με τον κόπο και τον αγώνα που δώσατε τη χρονιά αυτή.

***καλή δύναμη***

και κυρίως...

την καλύτερη συνέχεια στην «ενήλικη ζωή σας», που μόλις ξεκινά.

Οι εξετάσεις σας αυτές δεν είναι παρά ένα επεισόδιο, στο ταξίδι σας.

***Καλή συνέχεια!!!***

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)