

Ορισμοί και εξισώσεις κίνησης

(δ' μέρος: Μια απαραίτητη επισήμανση-ανασκόπηση των ορισμών «φάση» και «αρχική φάση» και μια εφαρμογή στα «κύματα»)

(Θεωρώ απαραίτητο να επισημάνω κάποια εδάφια από προηγούμενες αναρτήσεις μου, προκειμένου, όχι μόνο να τονιστούν οι λόγοι που επιβάλλουν την επιλογή των τελικών μας στάσεων απέναντι στους ορισμούς «φάση» και «αρχική φάση», αλλά κυρίως για να σκιαγραφηθεί ο τρόπος με τον οποίο θα πρέπει, κατά τη γνώμη μου τουλάχιστον, να αντιμετωπίζουμε θέματα που αφορούν αυτές τις έννοιες.

Αν κάποιος αναγνώστης θεωρήσει ότι η επανάληψη των εδαφίων δεν έχει κάτι να του προσθέσει ή να του ξαναθυμίσει, μπορεί να παραλείψει το «Α. Θεωρητικό μέρος» και να περάσει στο «Β. Παραδείγματα». Αν και αυτό του είναι επίπονο, ας πάει κατευθείαν στο «Γ. Συμπέρασμα» και ας συνεχίσει!

Α. Θεωρητικό μέρος

Στην ανάρτηση «Ορισμοί και εξισώσεις κίνησης (α' μέρος)», μεταξύ άλλων, αναφέρονταν και τα εξής:

«.....Στην αναζήτηση (του σωστού ορισμού της φάσης και της αρχικής φάσης), επιβάλλεται να ανατρέξουμε στην ξεχωριστή εκείνη εσωτερική λειτουργία των διαφορικών εξισώσεων, με την οποία διάφορες ποσότητες (μεγέθη) ορίζονται, καθώς αποκαλύπτονται στον φυσικό, αλλά όχι στο μαθηματικό.....

.....σε μια εξίσωση κίνησης υπάρχουν **μεγέθη**, όπως π.χ. η «αρχική θέση» x_0 και η «αρχική ταχύτητα» v_0 , **τα οποία προϋπάρχουν** των προσδιοριστέων σταθερών (συνήθως δύο) που πάντα χρειάζεται μια εξίσωση κίνησης (λύση κάποιας κατάλληλης διαφορικής).

Τα μεγέθη αυτά και κατά συνέπεια και οι ορισμοί τους, που προϋπάρχουν της διαφορικής, δεν εξαρτώνται ούτε από τη διαφορική ούτε από τη λύση της ή από τη μορφή λύσης που θα επιλέξουμε.

Το κυριότερο όμως είναι ότι μπορούν να προσδιορίσουν τις έτσι κι αλλιώς απαραίτητες σταθερές της εξίσωσης κίνησης, αν αποτελούν δεδομένες συνθήκες του προβλήματος. Μπορούν συνεπώς να καθορίσουν την τελική μορφή της εξίσωσης κίνησης.

Το αντίθετο ακριβώς, όπως θα δούμε, συμβαίνει με **τη φάση και την αρχική φάση**.

Οι έννοιες φάση και αρχική φάση ορίζονται και άρα υπάρχουν σε απόλυτη εξάρτηση από τη διαφορική και από τη μορφή της συνάρτησης που θα επιλέξουμε ως λύση της διαφορικής, μιας και εξαρτώνται απόλυτα από τις σταθερές C_1 και C_2 που θα χρησιμοποιήσουμε και από τη μορφή της λύσης που θα επιλέξουμε.

Με τα παραπάνω θέλω να πω το εξής:

Όπως υπάρχουν ορισμοί που προσδιορίζουν τις σταθερές της εξίσωσης κίνησης, υπάρχουν και ορισμοί που προκύπτουν από τη μορφή της εξίσωσης κίνησης που θα επιλέξουμε, γεγονός που καθιστά όχι μόνο την ύπαρξή τους, αλλά και τη συμπεριφορά και τους μαθηματικούς περιορισμούς τους, απόλυτα συνδεδεμένους με την εξίσωση που θα επιλέξουμε και όχι με το φαινόμενο.

Η διαφορετικότητα αυτή των ορισμών πρέπει να αντανακλάται οπωσδήποτε και στην αντιμετώπιση που θα τύχουν από μας, επειδήοι σωστοί ορισμοί είναι, όχι απλά απαίτηση μιας σωστής Φυσικής, αλλά απαραίτητη προϋπόθεση μιας σωστής σκέψης.....

..... η αποσύνδεση του ορισμού της φάσης και της αρχικής φάσης από την εξίσωση κίνησης και τη μορφή της, δεν είναι ασφαλής και γρήγορα, αν δεν υπάρξει η κατάλληλη εμπειρία και η ξεχωριστή ικανότητα, θα οδηγήσει τον φυσικό και όχι μόνο, σε παρανοήσεις τόσο του φαινομένου, όσο και του εννοιολογικού του εξοπλισμού και της μαθηματικής του επεξεργασίας.

Τα μεγέθη πολλές φορές έχουν, όχι απλά άλλη ποιότητα, αλλά ακολουθούν τελείως διαφορετικές εννοιολογικές και φορμαλιστικές διαδρομές, με αποτέλεσμα οι ορισμοί τους να συνδέονται άμεσα με αυτές τις διαδρομές και ο χειρισμός τους να αντανακλά αυτές τις διαδρομές.....»

Στην ανάρτηση «Ορισμοί και εξισώσεις κίνησης (β' μέρος)» προσπάθησα να γίνω σαφέστερος με εκτενή σχόλια και μαθηματικά επιχειρήματα:

«.....
..... Αποδεικνύεται ότι οι πιο σημαντικές, ισοδύναμες μεταξύ τους μορφές, με τις οποίες μπορεί να δοθεί αυτή η γενική λύση και κατά συνέπεια να δοθεί η εξίσωση κίνησης του απλού αρμονικού ταλαντωτή,^(*) είναι τρεις:

1^η μορφή:

$$x=C_1\cdot\eta\mu\omega t + C_2\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t \quad t \geq t_0 \in R$$

2^η μορφή:

$$x=C_3\cdot\eta\mu(\omega t + C_4) \quad t \geq t_0 \in R$$

3^η μορφή:

$$x=C_5\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t + C_6) \quad t \geq t_0 \in R$$

Στις παραπάνω ισοδύναμες μορφές της γενικής εξίσωσης κίνησης ισχύουν ποιοτικά τα ίδια που αναφέρθηκαν και στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση (σελ.2), στο α' μέρος της ανάρτησης «Ορισμοί και εξισώσεις κίνησης»:

α) Δεν απαιτείται καμιά δικιά μας εκ των υστέρων τροποποίηση στο χρόνο t , να γίνει δηλαδή $t-t_0$ ή κάτι άλλο, παρά μόνο ο προσδιορισμός των σταθερών C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 και C_6 συναρτήσει των συνθηκών που θα μας δώσουν

β) Οι παραπάνω σταθερές, **γενικά**, όχι μόνο δεν είναι η αρχική ταχύτητα v_0 και η αρχική θέση x_0 του υλικού σημείου, αλλά ούτε και συνδυασμοί τους.

Είναι εκφράσεις, αποκλειστικά των συγκεκριμένων συνθηκών που θα μας δώσουν και επιβάλλεται να μας δώσουν. Οι συνθήκες αυτές δεν είναι κατ' ανάγκη οι αρχικές συνθήκες x_0 και v_0 .

(*) Όσα ακολουθούν, ισχύουν προφανώς όχι μόνο στον α.α.τ., αλλά και στην πιο γενική περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή, μιας και είναι καθαροί μαθηματικοί μετασχηματισμοί και συνέπειες.

γ) Επίσης αποδεικνύονται τα παρακάτω πολύ σημαντικά:

- ✓ Τα C_1 και C_2 , θεωρητικά τουλάχιστον, δε χρειάζεται να πληρούν κανένα περιορισμό και συνεπώς μπορεί να είναι οποιοδήποτε πραγματικοί αριθμοί
- ✓ Για τα C_3, C_5 είχαμε μαθηματικά το δικαίωμα και τα επιλέξαμε θετικά. Οι λόγοι που μας ώθησαν σε αυτή την επιλογή είναι παρόμοιοι με αυτούς που μας ώθησαν να επιλέξουμε θετική και την κυκλική συχνότητα ω , μιας και θα μπορούσαμε το ίδιο καλά να είχαμε καλέσει $\omega = -\sqrt{\frac{D}{m}}$

(Οι λόγοι αυτοί έχουν ήδη αναφερθεί)

Εδώ υπάρχει και ένας ακόμη σημαντικός λόγος για την επιλογή των C_3 και C_5 ως θετικών ποσοτήτων: να κάνουμε τα C_3 και C_5 πλάτος ταλάντωσης, μέγιστη δηλαδή απόσταση από το ελκτικό κέντρο.

Αποδεικνύεται δηλαδή, ότι αν επιλέξουμε τα C_3 και C_5 θετικά, τότε το πλάτος της ταλάντωσης είναι

$$A = C_3 = C_5 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

Με άλλα λόγια, θα μπορούσαμε τα C_3, C_5 , αλλά και το ω να τα είχαμε επιλέξει αρνητικά. Θα λειτουργούσαν όλα το ίδιο καλά, απλά θα έπρεπε να προσαρμόσουμε λίγο τους ορισμούς μας.

- ✓ Τα C_4, C_6 μπορούν να είναι οποιοδήποτε πραγματικοί αριθμοί. Όμως η περιοδικότητα των συναρτήσεων ημίτονο και συνημίτονο μας επιτρέπει να ακολουθήσουμε τη βασική φιλοσοφία που διέπει όλη τη Φυσική και που απαιτεί να την παρουσιάσουμε με τον πιο οικονομικό τρόπο.

Έτσι μπορούμε, επιτρέπεται και το κάνουμε να περιορίσουμε τις τιμές των C_4 και C_6 μέσα σε έναν τριγωνομετρικό κύκλο και όχι σε περισσότερους, μιας και η επέκταση σε περισσότερους κύκλους δεν προσφέρει τίποτε επί πλέον στη φυσική των φαινομένων που εξετάζουμε.

Για τα C_4 και C_6 επιλέγουμε να πάρουμε για την κάλυψη του ενός τριγωνομετρικού κύκλου που χρειαζόμαστε και άρα ως πεδίο ορισμού τους, το διάστημα $[0, 2\pi)$.

Δηλαδή επιλέξαμε $0 \leq C_4 < 2\pi$ και $0 \leq C_6 < 2\pi$.

Θα μπορούσαμε, για παράδειγμα, να δεχτούμε ως διάστημα και το $[-\pi, \pi)$ ή οποιοδήποτε άλλο διάστημα, αρκεί να καλύψουμε έναν τριγωνομετρικό κύκλο.

Επομένως

Η γενική μορφή της εξίσωσης κίνησης ενός υλικού σημείου που εκτελεί (απλή) αρμονική ταλάντωση για χρονικές στιγμές $t \geq t_0 \in \mathbf{R}$, μπορεί να δοθεί με τρεις ισοδύναμες μορφές

1^η μορφή:

$$x = C_1 \cdot \eta\mu\omega t + C_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t \quad t \geq t_0 \in \mathbf{R} \quad (16)$$

C_1 και C_2 πραγματικοί αριθμοί

2^η μορφή:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + C_4) \quad t \geq t_0 \in \mathbf{R} \quad (17)$$

$A > 0$ και $0 \leq C_4 < 2\pi$

3^η μορφή:

$$x=A\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t + C_6) \quad t \geq t_0 \in R \quad (18)$$

$$A>0 \quad \text{και} \quad 0 \leq C_6 < 2\pi$$

(Όπως ήδη έχουμε πει, σχεδόν όσα προηγήθηκαν και όσα θα ακολουθήσουν αφορούν τις συναρτήσεις και όχι το φαινόμενο. Αποτέλεσμα αυτού είναι να εφαρμόζονται όχι μόνο στην απλή αρμονική ταλάντωση, αλλά σε όλα σχεδόν τα μεγέθη που μεταβάλλονται αρμονικά με το χρόνο, που έχουν δηλαδή ίδιες εξισώσεις)

Οι έννοιες της φάσης και της αρχικής φάσης δε μπορούν να εντοπιστούν στη μορφή (16), παρά μόνο στις εξισώσεις (17) και (18).

Είναι δηλαδή έννοιες που συνδέονται άμεσα με τη μορφή της εξίσωσης κίνησης που θα επιλέξουμε και όχι με τη ταλάντωση, ή γενικά με το φαινόμενο.

Αφήνοντας λοιπόν κατά μέρος την (16), ας δούμε τα πράγματα πιο αναλυτικά, εξετάζοντας για παράδειγμα τη μορφή (17) της εξίσωσης κίνησης της αρμονικής ταλάντωσης:

Στην εξίσωση κίνησης

$$x=A\cdot\eta\mu(\omega t + C_4) \quad \text{με} \quad t \geq t_0 \in R \quad , \quad A>0 \quad \text{και} \quad 0 \leq C_4 < 2\pi \quad (19)$$

μπορούμε να ονομάσουμε φάση της απομάκρυνσης την ποσότητα

$$\varphi=\omega t+C_4 \quad \text{με} \quad t \geq t_0 \in R$$

Αυτόματα, η ποσότητα $\varphi_0=\omega t_0+C_4$ θα πρέπει να ονομαστεί αρχική φάση της απομάκρυνσης στην παραπάνω εξίσωση κίνησης.

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι ο περιορισμός $0 \leq C_4 < 2\pi$ είναι αδύναμος, μιας και το γεγονός ότι η χρονική στιγμή t_0 που αρχίσαμε να μελετάμε το φαινόμενο μπορεί θεωρητικά να πάρει οποιαδήποτε τιμή, επιτρέπουν στην αρχική φάση $\varphi_0=\omega t_0+C_4$ να πάρει οποιαδήποτε τιμή.

Επειδή όμως έχουμε συνηθίσει να συνδέουμε την αρχική φάση με το «ξεκίνημα» της μελέτης του φαινομένου (της ταλάντωσης επί του προκειμένου) και συνεπώς με το γεγονός ότι ακόμη δεν έχει ολοκληρωθεί καμιά ταλάντωση, δε θα θέλαμε να βλέπαμε μέσα σε μια αρχική φάση απομάκρυνσης, τιμές που να περιέχουν ακόμη και τεράστια πολλαπλάσια του 2π , μιας και υπήρχε κίνδυνος, αυτό να εκληφθεί ως πληροφορία, (λανθασμένη σε αυτό το καθεστώς που περιγράφουμε), ότι έχουν εκτελεστεί ήδη πάμπολλες ταλαντώσεις.

Για να γλιτώσουμε λοιπόν τις συνθήειές μας και γιατί όχι και τη λογική μας, μπορούμε μαθηματικά να τροποποιήσουμε την εξίσωση κίνησης (19):

Από τη σχέση $\varphi_0=\omega t_0+C_4$ της αρχικής φάσης προκύπτει

$$C_4= \varphi_0-\omega t_0$$

και συνεπώς η εξίσωση κίνησης γίνεται

$$x=A\cdot\eta\mu[\omega(t-t_0)+ \varphi_0] \quad t \geq t_0 \in R \quad (20)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (19) και (20) και βλέποντας ότι τα C_4 και φ_0 μπαίνουν σε «ισάζιες θέσεις», **αντί να απαιτήσουμε** από το C_4 να παίρνει τις περιορισμένες τιμές $0 \leq C_4 < 2\pi$, οπότε το φ_0 θα παίρνει αναγκαστικά οποιαδήποτε πραγματική τιμή, **απαιτούμε από την αρχική φάση** φ_0 να παίρνει τιμές σε ένα τριγωνομετρικό κύκλο $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$, οπότε το C_4 μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, ανάλογα με την επιλογή της αρχής των χρόνων που κάνουμε.

(Όπως έχουμε ξαναπεί, ένας τριγωνομετρικός κύκλος καλύπτεται και με άλλες επιλογές διαστημάτων, όπως π.χ. $-\pi \leq \varphi_0 < \pi$ κ.λ.π.)

Υιοθετώντας αυτή την επιλογή για την αρχική φάση, αυτόματα και η συνάρτηση που δίνει τις τιμές της φάσης αλλάζει από

$$\varphi = \omega t + C_4 \quad \text{με} \quad t \geq t_0 \in R \quad \text{και} \quad 0 \leq C_4 < 2\pi$$

$$\text{σε} \quad \varphi = \omega(t - t_0) + \varphi_0 \quad \text{με} \quad t \geq t_0 \in R \quad \text{και} \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi$$

Βασικά συμπεράσματα για τους ορισμούς των εννοιών «φάση» και «αρχική φάση».

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι έχουμε δύο δυνατότητες γραφής και άρα επιλογής των ορισμών «φάση» και «αρχική φάση»

1η δυνατότητα:

Στην εξίσωση κίνησης

$$x = A \cdot \eta \mu(\omega t + C_4) \quad \text{με} \quad t \geq t_0 \in R, \quad A > 0 \quad \text{και} \quad 0 \leq C_4 < 2\pi \quad (21)$$

ονομάζουμε **φάση της απομάκρυνσης**, την ποσότητα

$$\varphi = \omega t + C_4 \quad \text{με} \quad t \geq t_0 \in R \quad \text{και} \quad 0 \leq C_4 < 2\pi \quad (22)$$

Κατά συνέπεια, ονομάζουμε **αρχική φάση της απομάκρυνσης** την ποσότητα

$$\varphi_0 = \omega t_0 + C_4 \quad t_0 \in R \quad \text{και} \quad 0 \leq C_4 < 2\pi \quad (\text{προφανώς} \quad \varphi_0 \in R) \quad (23)$$

Οι σταθερές A και C_4 θα προσδιοριστούν από τις συνθήκες που μας δίνουν και οι οποίες δεν είναι απαραίτητο να είναι οι αρχικές.

2η δυνατότητα:

Στην εξίσωση κίνησης

$$x = A \cdot \eta \mu(\omega t + C_4) \quad \text{με} \quad t \geq t_0 \in R \quad A > 0 \quad \text{και} \quad C_4 \text{ πραγματικός} \quad (24)$$

ονομάζουμε **φάση της απομάκρυνσης**, την ποσότητα

$$\varphi = \omega t + C_4 \quad t \geq t_0 \in R \quad (25)$$

Κατά συνέπεια, ονομάζουμε **αρχική φάση της απομάκρυνσης** την ποσότητα

$$\varphi_0 = \omega t_0 + C_4 \quad \text{με τον ισχυρό περιορισμό} \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \quad (26)$$

Οι σταθερές $A > 0$ και C_4 θα προσδιοριστούν από τις συνθήκες που μας δίνουν και οι οποίες δεν είναι απαραίτητο να είναι οι αρχικές.

Ο προσδιορισμός όμως του C_4 , επειδή αυτή η σταθερά τώρα θεωρείται πραγματικός αριθμός, θα γίνει με την αοριστία ακέραιων πολλαπλασίων του π . Θα περιέχει δηλαδή το $2k\pi$ (βλέπε παραδείγματα παρακάτω).

Έτσι η ακριβής τιμή του θα απαιτήσει οπωσδήποτε και τον ισχυρό περιορισμό που μετατοπίσαμε στην αρχική φάση

$$0 \leq \varphi_0 < 2\pi \quad \text{δηλαδή} \quad \text{τον} \quad 0 \leq \omega t_0 + C_4 < 2\pi \quad (27)$$

2η δυνατότητα (εναλλακτικός τρόπος, προτιμητέος):

(Η ιδέα για αυτή τη δυνατότητα είναι του Διονύση)

Εκμεταλλευόμενοι τη σχέση (20), την οποία χρησιμοποιήσαμε προκειμένου να καταλήξουμε στη δεύτερη δυνατότητα, μπορούμε να δούμε τα πράγματα και με έναν άλλο τρόπο:

Στην εξίσωση κίνησης

$$x = A \cdot \eta \mu[\omega(t - t_0) + \varphi_0] \quad t \geq t_0 \in R \quad A > 0 \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \quad (28)$$

ονομάζουμε φάση της απομάκρυνσης, την ποσότητα

$$\varphi = \omega(t - t_0) + \varphi_0 \quad t \geq t_0 \in R \quad (29)$$

Όμοια ονομάζουμε αρχική φάση της απομάκρυνσης την ποσότητα

$$\varphi_0 \quad (29\alpha)$$

Οι σταθερές $A > 0$ και φ_0 θα προσδιοριστούν από τις συνθήκες που μας δίνουν και οι οποίες δεν είναι απαραίτητο να είναι οι αρχικές.

Όπως εξηγήσαμε, η πρώτη δυνατότητα δεν περιορίζει την αρχική φάση σε ένα τριγωνομετρικό κύκλο, δε βάζει κανένα περιορισμό στη φάση και στην αρχική φάση παρά μόνο σε μια σταθερά της εξίσωσης κίνησης, τη $0 \leq C_4 < 2\pi$ (βλέπε σχέση 21).

Συνεπώς είναι πολύ πιο ισχυρή από τη δεύτερη δυνατότητα. Όμως χαλά όλες τις συνθήκες μας και το «τραγικότερο» είναι, ότι εύκολα μπορεί να καταργήσει και τις δύο έννοιες (φάση και αρχική φάση) αν κάποιος άρει (και έχει μαθηματικά το δικαίωμα) το μοναδικό περιορισμό $0 \leq C_4 < 2\pi$, που θέτει η οικονομία της περιγραφής των φαινομένων.

Γι' αυτή και μόνο την αναστάτωση που πιθανώς να επιφέρει στις συνθήκες μας, στις εκφράσεις μας και στον τρόπο σκέψης μας, πιστεύω, χωρίς αυτό να είναι ούτε απαραίτητο ούτε αναγκαίο, ότι πρέπει να υιοθετήσουμε τη δεύτερη δυνατότητα ορισμών «φάσης» και «αρχικής φάσης» και μάλιστα τον εναλλακτικό τρόπο, ο οποίος θα αποδειχτεί παρακάτω πιο «φιλικός».

.....

B. Παραδείγματα εύρεσης φάσης και αρχικής φάσης στις ταλαντώσεις και στη συμβολή των κυμάτων

Ας ξεκινήσουμε ξαναθυμίζοντας τρία παραδείγματα από την ανάρτηση «**Ορισμοί και εξισώσεις κίνησης (β' μέρος)**»

1^ο παράδειγμα:

Υλικό σημείο εκτελεί (απλή) αρμονική ταλάντωση που περιγράφεται από εξίσωση κίνησης της μορφής $x=A\cdot\eta\mu(\omega t+C_4)$.

Τη χρονική στιγμή $t_0=2\text{ sec}$ που αρχίζουμε να μελετάμε την κίνηση το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 10^{-1}\text{ m}$ (αρχική θέση) και έχει ταχύτητα $v_0 = \sqrt{2} 10^{-1} \pi \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ (αρχική ταχύτητα). Αν η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T=1\text{ sec}$, να βρεθεί η ... φάση και η αρχική φάση της απομάκρυνσης στη δεδομένη μορφή εξίσωσης κίνησης.

(Στην άσκηση δίνονται **δύο** συγκεκριμένες συνθήκες, οι αρχικές. Θα μπορούσαν όμως να είναι οποιεσδήποτε άλλες, αλλά πάντα δύο)

Λύση

α' τρόπος: Με τη χρήση των σχέσεων (24) έως (27)

Την εξίσωση κίνησης που μας δίνουν, φέρνουμε στη μορφή και τους περιορισμούς της συνάρτησης (24):

$$x=A\cdot\eta\mu(2\pi t + C_4) \quad \text{με} \quad t \geq 2\text{ sec} \quad , \quad A > 0 \quad \text{και} \quad \underline{C_4 \text{ πραγματικός αριθμός}} \quad (30)$$

Τότε η φάση της απομάκρυνσης θα είναι

$$\varphi=2\pi t + C_4 \quad \text{με} \quad t \geq 2\text{ sec} \quad \text{και} \quad C_4 \in R \quad (30\alpha)$$

και η αρχική φάση της απομάκρυνσης θα είναι

$$\varphi_0=2\pi t_0+C_4 \quad \text{με τον ισχυρό περιορισμό} \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \quad (30\beta)$$

Επομένως όλο το πρόβλημα εντοπίζεται στον υπολογισμό της σταθεράς C_4 .

Ας τον κάνουμε:

Η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι

$$v=A2\pi\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi t + C_4) \quad \text{με} \quad t \geq 2\text{ sec} \quad , \quad A > 0 \quad \text{και} \quad C_4 \text{ πραγματικός} \quad (31)$$

Για $t=t_0=2\text{ sec}$, οι σχέσεις (30) και (31) δίνουν

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 10^{-1}=A\cdot\eta\mu(4\pi+C_4) \quad \text{με} \quad A > 0 \quad \text{και} \quad C_4 \text{ πραγματικός}$$

$$\sqrt{2} 10^{-1} \pi = A2\pi\cdot\sigma\upsilon\nu(4\pi+C_4) \quad \text{με} \quad A > 0 \quad \text{και} \quad C_4 \text{ πραγματικός}$$

Από όπου προκύπτει

$$A=10^{-1} \text{ m} \quad , \quad \eta\mu C_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu C_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

και τελικά

$$A=10^{-1} \text{ m} \quad \text{και} \quad C_4 = 2k\pi + \frac{7\pi}{4} \text{ rad} \quad \mu\epsilon \quad k \in Z \quad (32)$$

Βλέπουμε καθαρά πια, ότι ενώ η τιμή του A , της μιας δηλαδή από τις δύο σταθερές A και C_4 που επιβάλλει η διαφορική εξίσωση έχει ήδη προσδιοριστεί από τις αρχικές συνθήκες, ο προσδιορισμός της ακριβούς τιμής του C_4 , απαιτεί τον ορισμό και τον περιορισμό που υιοθετήσαμε για την αρχική φάση.

Αυτός είναι και ο βαθύτερος κεφαλαιώδης ποιοτικός διαχωρισμός των εννοιών «πλάτος» και «αρχική φάση» που κάνει το πλάτος γρήγορα να ανεξαρτητοποιηθεί από τη μορφή της εξίσωσης κίνησης που θα χρησιμοποιήσουμε για τη ταλάντωση και έτσι να γίνει έννοια που αφορά το φαινόμενο και όχι τη συνάρτηση, την εξίσωση κίνησης δηλαδή.

Λέμε πλάτος ταλάντωσης, αλλά ποτέ αρχική φάση ταλάντωσης

Από τη σχέση (30α) προκύπτει ότι η φάση της απομάκρυνσης στη δεδομένη μορφή της εξίσωσης κίνησης είναι

$$\varphi = 2\pi t + C_4 = 2\pi t + 2k\pi + \frac{7\pi}{4} \quad \mu\epsilon \quad k \in Z \quad \text{και} \quad t \geq 2 \text{ sec} \quad (33)$$

και επομένως η αρχική φάση είναι

$$\varphi_0 = 4\pi + 2k\pi + \frac{7\pi}{4} \quad \mu\epsilon \quad k \in Z \quad (34)$$

Πρέπει όμως

$$0 \leq \varphi_0 < 2\pi$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω διπλή ανίσωση την φ_0 από την σχέση (34) προκύπτει

$$k = -2$$

Τότε από σχέση (32) προκύπτει

$$C_4 = -4\pi + \frac{7\pi}{4} = -\frac{9\pi}{4} \text{ rad}$$

και συνεπώς η εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου (30) γίνεται

$$x = 10^{-1} \cdot \eta\mu\left(2\pi t - \frac{9\pi}{4}\right) \quad (SI) \quad \mu\epsilon \quad t \geq 2 \text{ sec} \quad (35)$$

Η φάση της απομάκρυνσης στην εξίσωση κίνησης (35) είναι

$$\varphi = 2\pi t - \frac{9\pi}{4} \quad \text{και} \quad t \geq 2 \text{ sec}$$

και η αρχική φάση

$$\varphi_0 = 2\pi \cdot 2 - \frac{9\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \text{ rad}$$

β' τρόπος: Με τη χρήση των σχέσεων (28) έως (29α)

Την εξίσωση κίνησης που μας δίνουν, φέρουμε στη μορφή και τους περιορισμούς της συνάρτησης (28):

$$x = A \cdot \eta\mu[2\pi(t-2) + \varphi_0] \quad t \geq 2 \text{ sec} \quad A > 0 \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \quad (36)$$

τότε η φάση της απομάκρυνσης θα είναι

$$\varphi = 2\pi(t-2) + \varphi_0 \quad t \geq 2 \text{ sec} \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \quad (36\alpha)$$

και η αρχική φάση της απομάκρυνσης θα είναι

$$\varphi_0$$

Επομένως όλο το πρόβλημα εντοπίζεται στον υπολογισμό της φ_0 .

Ας τον κάνουμε:

Η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι

$$v = 2\pi A \cdot \sigma\upsilon\nu[2\pi(t-2) + \varphi_0] \quad t \geq 2 \text{ sec} \quad A > 0 \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \quad (36\beta)$$

Για $t = t_0 = 2 \text{ sec}$, οι παραπάνω σχέσεις (36) και (36β) απομάκρυνσης και ταχύτητας αντίστοιχα δίνουν

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10^{-1} = A \eta\mu\varphi_0 \quad \text{και} \quad \sqrt{2} \cdot 10^{-1} \pi = 2\pi A \sigma\upsilon\nu\varphi_0$$

Από όπου

$$A = 10^{-1} \text{ m} \quad , \quad \eta\mu\varphi_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Τελικά και με δεδομένο ότι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ προκύπτει

$$A = 10^{-1} \text{ m} \quad \text{και} \quad \varphi_0 = \frac{7\pi}{4} \text{ rad}$$

Από τη σχέση (36) προκύπτει η εξίσωση κίνησης

$$x = 10^{-1} \cdot \eta\mu\left[2\pi(t-2) + \frac{7\pi}{4}\right] \quad \mu\epsilon \quad t \geq 2 \text{ sec} \quad (37)$$

δηλαδή η

$$x = 10^{-1} \cdot \eta\mu\left(2\pi t - \frac{9\pi}{4}\right) \quad (SI) \quad \mu\epsilon \quad t \geq 2 \text{ sec} \quad (38)$$

Κατά συνέπεια η φάση της απομάκρυνσης στην εξίσωση κίνησης (38) είναι

$$\varphi = 2\pi t - \frac{9\pi}{4} \quad \mu\epsilon \quad t \geq 2 \text{ sec}$$

και η αρχική φάση

$$\varphi_0 = 2\pi \cdot 2 - \frac{9\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \text{ rad}$$

τιμή την οποία εξάλλου έχουμε ήδη βρει.

2^ο παράδειγμα:

Υλικό σημείο εκτελεί (απλή) αρμονική ταλάντωση που περιγράφεται από την εξίσωση

$$x=10^{-1} \cdot \eta\mu(2\pi t - \frac{9\pi}{4}) \quad (SI) \quad \mu\epsilon \quad t \geq 2 \text{ sec} \quad (39)$$

Να βρεθεί η φάση και η αρχική φάση της απομάκρυνσης x στη δεδομένη μορφή της εξίσωσης κίνησης, στη δεδομένη δηλαδή μορφή της εξίσωσης αρμονικής ταλάντωσης.

Λύση

α' τρόπος: Με τη χρήση των σχέσεων (24) έως (27)

Την εξίσωση κίνησης που μας δίνουν, φέρνουμε στη μορφή και τους περιορισμούς της συνάρτησης (24)

$$x=A \cdot \eta\mu(2\pi t + C_4) \quad \mu\epsilon \quad t \geq 2 \text{ sec} \quad , \quad A > 0 \quad \text{και} \quad \underline{C_4 \text{ πραγματικός}} \quad (40)$$

Τότε η φάση της απομάκρυνσης θα είναι

$$\varphi = 2\pi t + C_4 \quad t \geq 2 \text{ sec} \quad C_4 \in R \quad (40\alpha)$$

και η αρχική φάση της απομάκρυνσης θα είναι

$$\varphi_0 = 2\pi + C_4 \quad \mu\epsilon \text{ τον ισχυρό περιορισμό } 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \quad (40\beta)$$

Επομένως όλο το πρόβλημα εντοπίζεται στον υπολογισμό της σταθεράς C_4 .

Ας τον κάνουμε:

Για να έχει η εξίσωση κίνησης (39) που μας δίνουν, τη μορφή της σχέσης (40) **για όλες τις χρονικές στιγμές $t \geq 2 \text{ sec}$** , πρέπει να ισχύει

$$A=10^{-1} \text{ m} \quad \text{και} \quad \eta\mu(2\pi t + C_4) = \eta\mu(2\pi t - \frac{9\pi}{4})$$

και συνεπώς πρέπει

$$C_4 = 2k\pi - \frac{9\pi}{4} \quad (40\gamma)$$

Τότε η φάση και η αρχική φάση, λόγω των σχέσεων (40α), (40β) και (40γ) θα είναι

$$\varphi = 2\pi t + 2k\pi - \frac{9\pi}{4} \quad t \geq 2 \text{ sec}$$

$$\varphi_0 = 4\pi + 2k\pi - \frac{9\pi}{4}$$

Απαιτώντας $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ προκύπτει $k=0$

Άρα η φάση της απομάκρυνσης στην (40) και κατά συνέπεια στην εξίσωση κίνησης (39) που μας δίνουν είναι

$$\varphi = 2\pi t - \frac{9\pi}{4} \quad \mu\epsilon \quad t \geq 2 \text{ sec}$$

και η αρχική φάση είναι

$$\varphi_0 = \frac{7\pi}{4}$$

β' τρόπος: Με τη χρήση των σχέσεων (28) και (29)

Την εξίσωση κίνησης που μας δίνουν, φέρνουμε στη μορφή και τους περιορισμούς της συνάρτησης (28):

$$x=A\cdot\eta\mu[2\pi(t-2)+\varphi_0] \quad t \geq 2 \text{ sec} \quad A>0 \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \quad (41)$$

Τότε η φάση της απομάκρυνσης θα είναι

$$\varphi=2\pi(t-2)+\varphi_0 \quad (41\alpha)$$

και η αρχική φάση της απομάκρυνσης θα είναι

$$\varphi_0$$

Επομένως όλο το πρόβλημα εντοπίζεται στον υπολογισμό της φ_0 .

Ας τον κάνουμε:

Μετασχηματίζουμε την εξίσωση κίνησης (39) που μας δίνουν ώστε να αποκτήσει τη μορφή της σχέσης (41)

$$x=10^{-1}\cdot\eta\mu[2\pi(t-2)+4\pi-\frac{9\pi}{4}] \quad t \geq 2 \text{ sec}$$

και τελικά

$$x=10^{-1}\cdot\eta\mu[2\pi(t-2)+\frac{7\pi}{4}] \quad (SI) \quad t \geq 2 \text{ sec} \quad (42)$$

Άρα η φάση της απομάκρυνσης στην εξίσωση κίνησης (42) και κατά συνέπεια στην εξίσωση κίνησης (39) που μας έδωσαν είναι

$$\varphi=2\pi(t-2)+\frac{7\pi}{4}=2\pi t-\frac{9\pi}{4} \quad \text{με} \quad t \geq 2 \text{ sec}$$

και η αρχική φάση της απομάκρυνσης θα είναι

$$\varphi_0=\frac{7\pi}{4}$$

Σημειώσεις:

α) Από το παραπάνω παράδειγμα φαίνεται η ευκολία με την οποία λύνεται το πρόβλημα της φάσης και της αρχικής φάσης με τον β' τρόπο, αν φέρουμε δηλαδή την εξίσωση κίνησης που μας δίνουν στη μορφή της συνάρτησης (28), με τους περιορισμούς όμως που ακολουθούν αυτή τη μορφή. Τον τρόπο αυτόν θα ακολουθήσουμε και στο επόμενο παράδειγμα.

Ίσως κάποιος πει, γιατί να τα κάνουμε όλα αυτά αφού θα μπορούσαμε και μόνο με παρατήρηση, σύγκριση και με μια αντικατάσταση στην εξίσωση κίνησης (39) που μας δίνουν, να βρούμε αυτά που ζητάμε πολύ πιο εύκολα.

Ο λόγος της ευκολίας που πιθανώς να διακρίνει κάποιος, οφείλεται στο γεγονός ότι η (39) ήταν σχέση «μαγειρεμένη». Είχε ετοιμαστεί από το πρώτο παράδειγμα. Τα πράγματα όμως δε θα είναι πάντα τόσο ευδιάκριτα. Θα το διαπιστώσουμε στο επόμενο παράδειγμα.

β) Η εξίσωση κίνησης (39) που μας δώσανε

$$x=10^{-1} \cdot \eta\mu(2\pi t - \frac{9\pi}{4}) \quad (SI) \quad \mu\epsilon \quad t \geq 2 \text{ sec}$$

είναι μαθηματικά ισοδύναμη με την

$$x=10^{-1} \cdot \eta\mu(2\pi t - \frac{\pi}{4}) \quad (SI) \quad \mu\epsilon \quad t \geq 2 \text{ sec}$$

Κατά συνέπεια, αυτή η τελευταία θα μπορούσε κάλλιστα να δοθεί στη θέση της πρώτης. Μήπως αυτό θα επηρέαζε τη φάση και την αρχική φάση που θα βρίσκαμε, γεγονός που θα καθιστούσε και τους ορισμούς και τις έννοιες άχρηστες;

Η απάντηση είναι όχι. Οποιαδήποτε μαθηματικά ισοδύναμη σχέση και να χρησιμοποιήσουμε ως εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης, εφόσον ακολουθήσουμε με συνέπεια όσα αναφέραμε, θα καταλήξουμε στην ίδια σχέση για τη φάση και στην ίδια τιμή για την αρχική φάση.

Το γεγονός αυτό δείχνει τη συνέπεια των ορισμών που δώσαμε για φάση και αρχική φάση. Συνεπώς αν τους υιοθετήσουμε, που τουλάχιστον βουβά μέχρι τώρα το έχουμε ήδη κάνει στη φυσική, δεν θα έχουμε αντιφάσεις.

γ) Ο λόγος που στην εξίσωση (39) χρησιμοποιήσαμε το $-\frac{9\pi}{4}$ και όχι το ισοδύναμο $-\frac{\pi}{4}$ ήταν για να δείξουμε ότι αυτός που θα μας δώσει μια εξίσωση κίνησης δεν είναι υποχρεωμένος να την έχει επεξεργαστεί και να έχει υιοθετήσει κάποιες φόρμες ή να έχει προσέξει τις μαθηματικές ισοδυναμίες.

Αυτός που θα μας δώσει την εξίσωση κίνησης είναι ελεύθερος να μας δώσει ό,τι θέλει (μαθηματικά ισοδύναμο), αρκεί να δώσει όπως οφείλει να δώσει σε κάθε συνάρτηση, το πεδίο ορισμού της.

3^ο παράδειγμα:

Υλικό σημείο εκτελεί (απλή) αρμονική ταλάντωση που περιγράφεται από την εξίσωση κίνησης

$$x=10^{-1} \cdot \eta\mu(\frac{\pi}{4}t + \frac{10\pi}{3}) \quad (SI) \quad \mu\epsilon \quad t \geq -3 \text{ sec} \quad (41)$$

Να βρεθεί η φάση και η αρχική φάση της απομάκρυνσης στη δεδομένη μορφή εξίσωσης κίνησης.

Λύση

Μετασχηματίζουμε τη σχέση (41) ώστε να αποκτήσει τη μορφή της σχέσης (28), δηλαδή να αποκτήσει τη μορφή

$$x=A \cdot \eta\mu[\omega(t-t_0)+\varphi_0] \quad t \geq t_0 \in R \quad A>0 \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi$$

Πράγματι η (41) γίνεται

$$x=10^{-1} \cdot \eta\mu\left[\frac{\pi}{4}(t+3) - \frac{3\pi}{4} + \frac{10\pi}{3}\right] \quad t \geq -3 \text{ sec}$$

ή

$$x=10^{-1} \cdot \eta\mu\left[\frac{\pi}{4}(t+3) + \frac{31\pi}{12}\right] \quad t \geq -3 \text{ sec}$$

Αφαιρώ (ή προσθέτω αν με βολεύει) ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π προκειμένου να δημιουργήσω θετική αρχική φάση περιορισμένη σε έναν τριγωνομετρικό κύκλο

$$x=10^{-1} \cdot \eta\mu\left[\frac{\pi}{4}(t+3) - 2\pi + \frac{31\pi}{12}\right] \quad t \geq -3 \text{ sec}$$

και τελικά

$$x=10^{-1} \cdot \eta\mu\left[\frac{\pi}{4}(t+3) + \frac{7\pi}{12}\right] \quad (SI) \quad \text{με} \quad t \geq -3 \text{ sec} \quad (42)$$

Άρα η φάση της απομάκρυνσης στην εξίσωση κίνησης (42) και κατά συνέπεια στην εξίσωση κίνησης (41) που μας έδωσαν είναι

$$\varphi = \frac{\pi}{4}(t+3) + \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4}t + \frac{4\pi}{3} \quad \text{με} \quad t \geq -3 \text{ sec}$$

και άρα η αρχική φάση θα είναι

$$\varphi_0 = \frac{7\pi}{12} \text{ rad}$$

Σημείωση:

Θα είχαμε καταλήξει στην ίδια ακριβώς σχέση για τη φάση και στην ίδια τιμή για την αρχική φάση ακόμη και αν αρχίζαμε από οποιαδήποτε εξίσωση, μαθηματικά ισοδύναμη με τη δεδομένη εξίσωση κίνησης, όπως π.χ. από την

$$x=10^{-1} \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{4\pi}{3}\right) \quad (SI) \quad \text{με} \quad t \geq -3 \text{ sec}$$

Αρκεί η σχέση που θα μας έδιναν να βρούμε τη φάση και την αρχική φάση να ήταν ισοδύναμη μαθηματικά με την (41) και κατά συνέπεια να είχε το ίδιο πεδίο ορισμού με αυτή!!!

.....
»

Γ. Συμπέρασμα

(ένας απλός τρόπος υπολογισμού φάσης και αρχικής φάσης)

Με τα παραπάνω θεμελιώνεται μαθηματικά ένας πολύ απλός τρόπος εύρεσης της φάσης και της αρχικής φάσης, σε μια τυχαία εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης την οποία μας δίνουν ή στην οποία καταλήγουμε μετά από διάφορους μαθηματικούς μετασχηματισμούς.

Απαίτηση όμως για την εφαρμογή αυτού του τρόπου είναι η παρουσία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, κάτι που στο κάτω-κάτω είναι και απαίτηση κάθε σοβαρής μαθηματικής αντιμετώπισης.

Ας τον δούμε:

Έστω για παράδειγμα ότι με οποιονδήποτε μαθηματικά σωστό τρόπο καταλήγουμε στην εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης

$$x = A\eta\mu(\omega t + \theta) \quad \text{με} \quad t \geq t_0 \quad (60)$$

Επειδή οι μαθηματικές μεθοδολογίες δεν ενδιαφέρονται για τις αγωνίες ενός φυσικού, δεν είναι καθόλου υποχρεωμένες να εξασφαλίσουν ότι η ποσότητα θ θα είναι αρχική φάση, ούτε ότι η ποσότητα $\omega t + \theta$ θα είναι φάση.

Αυτές οι έννοιες αφορούν τον φυσικό, ο οποίος θα πρέπει πρώτα να τις ορίσει με αυστηρότητα (και αυτό μπορεί να γίνει μόνο μέσα από την ξεχωριστή εσωτερική λειτουργία των διαφορικών εξισώσεων όπως έχουμε ήδη επισημάνει) και κατόπιν να χρησιμοποιήσει την εγγύηση των μαθηματικών για να εξασφαλίσει ότι η αυστηρότητα των ορισμών του θα είναι όχι απλά συνεπέστατη λογικά, αλλά κυρίως ότι θα δώσει την εγγύηση πως δεν θα προκύψουν παρανοήσεις.

Έτσι λοιπόν το θ που θα προκύψει από τους μαθηματικούς μετασχηματισμούς μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Τότε:

1ο βήμα: Στην (60) εμφανίζουμε την αρχική τιμή του χρόνου t_0 γράφοντάς την με τη μορφή

$$x = A\eta\mu[\omega(t - t_0) \pm \theta'] \quad \text{με} \quad t \geq t_0$$

2ο βήμα: Αν η θ' στο όρισμα του ημίτονου είναι μέσα σε ένα τριγωνομετρικό κύκλο αυτή είναι η αρχική φάση. Αλλιώς προσθέτουμε ή αφαιρούμε ακέραια πολλαπλάσια του 2π ώστε μετά την παράσταση $\omega(t - t_0)$ να εξασφαλίσουμε «γωνία» φ_0 η οποία να είναι μέσα στον τριγωνομετρικό κύκλο που έχουμε επιλέξει.

Να είναι δηλαδή στο διάστημα $[0, 2\pi)$ ή στο $[-\pi, \pi)$ κ.λ.π.

$$x = A\eta\mu[\omega(t - t_0) + \varphi_0] \quad \text{με} \quad t \geq t_0 \quad (60a)$$

3ο βήμα: Η ποσότητα $\varphi = \omega(t - t_0) + \varphi_0$ είναι η φάση και φ_0 είναι η αρχική φάση στη σχέση (60a). Άρα και στην (60) που μας έδωσαν.

Τον παραπάνω τρόπο εφαρμόσαμε ήδη στο 3ο παράδειγμα

Δ. Κύματα

Το έχω ξαναπεί, αλλά θα το ξαναπώ, γιατί νομίζω ότι μόνο έτσι, μόνο όταν πιστέψουμε στα λάθη που μας βάζουνε και διδάσκουμε, κάποια στιγμή θα βρεθούν κάποιοι ικανοί, που θα βρουν τρόπο να ζητήσουν ευθύνες από όλους εκείνους, που χρόνια τώρα μας βουλιάζανε, μας βουλιάζουνε και θα βουλιάξουνε γενιές ανθρώπων στα λάθη γράφοντας πανεπιστημιακά βιβλία χωρίς ποτέ να μπουν στον κόπο να ξαναψάξουν αυτά που γράφουν.

Το κεφάλαιο «Κύματα» που διδάσκουμε είναι το λιγότερο λανθασμένο. Λανθασμένο πιο πολύ από τις ταλαντώσεις, γιατί τα «κύματα» κουβαλάνε όλα τα λάθη των ταλαντώσεων και κάτι ακόμη, που είναι πιο τραγικά λανθασμένο. Τη διάδοση !!!!

Η διδασκαλία μας στο κεφάλαιο «Κύματα», ΔΥΣΤΥΧΩΣ ΣΤΗΡΙΖΕΤΑΙ ΣΤΗ ΔΙΑΔΟΣΗ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ!!!

Μα αυτά που διδάσκουμε ούτε «κύματα» είναι, ούτε διαδίδονται.

Και έτσι εμείς οι απλοί φυσικοί της γειτονιάς γινόμαστε τραγικές φιγούρες, μιας και μετά από ένα κεφάλαιο γεμάτο λάθη όπως είναι οι «ταλαντώσεις», αναγκάζομαστε να λέμε, να βρίσκουμε, να διδάσκουμε, να μπαλώνουμε και να εμπλουτίζουμε με ασκήσεις το δεύτερο κεφάλαιο, «Τα κύματα», που είναι ακόμη πιο λανθασμένο.

Η εμπειρία μου ως αεί υφιστάμενος τόσων και τόσων σε ένα Υπουργείο Παιδείας, που ηδονίζεται να αλλάζει ονόματα μόνο και όχι ουσία, μου λέει τούτο το απλό:

Όταν τόσο φυσικοί δυσκολευόμαστε κάποιες φορές να κατανοήσουμε αυτά που διδάσκουμε και που γράφει ένα σχολικό βιβλίο προορισμένο για μαθητές λυκείου, σίγουρα κάποιοι άλλοι κάνανε χοντρά λάθη ως «μέντορες» (γελοιοποίηση μιας ακόμη όμορφης αρχαίας λέξης) και μας βάλανε να διδάξουμε τα λάθη τους, με τέτοιο τρόπο, που στο τέλος ξεχάσαμε ότι ήταν δικά τους λάθη και νομίσαμε ότι όλα ήταν δικά μας σωστά!!!!!!.

Παρακάμπτω λοιπόν την ανύπαρκτη φυσική της συμβολής των «κύματων» που διδάσκουμε και χρησιμοποιώντας μόνο την ορολογία της, θα προσπαθήσω μέσα από μια ματιά «γυμνά» μαθηματική, να εφαρμόσω στο συγκεκριμένο «φαινόμενο» όσα προαναφέραμε. Επικαλούμενος και ελπίζοντας μόνο στην αυστηρότητα του ορισμού.

Αν εφαρμόσουμε με συνέπεια τους αυστηρούς ορισμούς της φάσης και της αρχικής φάσης που δώσαμε κι αν, σε φαινόμενα ίδιας ποιότητας, δεν αρνηθούμε τις μαθηματικές πορείες που καταγράψαμε κι ακολουθήσαμε στις τρεις προηγούμενες αναρτήσεις «Ορισμοί και εξισώσεις κίνησης α', β' και γ' μέρος», τότε δε θα υπάρξουν συλλογιστικά αδιέξοδα.

Ας το δούμε: (τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται θεωρούνται αυτονόητα)

Στην εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) \quad \text{με} \quad t \geq \frac{r_1}{v} \quad (61)$$

που επιβάλλει στο τυχαίο σημείο Μ το πρώτο «κύμα» όταν έχει διαδοθεί μόνο του, οι έννοιες της φάσης και της αρχικής φάσης είναι καθορισμένες με απόλυτη σαφήνεια, αρκεί να μην ξεχάσουμε το πεδίο ορισμού:

φάση της απομάκρυνσης στην εξίσωση ταλάντωσης (61)

$$\varphi = \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r_1}{\lambda} \quad \text{με} \quad t \geq \frac{r_1}{v}$$

αρχική φάση της απομάκρυνσης στην εξίσωση ταλάντωσης (61)

$$\varphi_0 = 0 \text{ rad}$$

Στην εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης

$$y_2 = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right) \quad \text{με} \quad t \geq \frac{r_2}{v} \quad (62)$$

που επιβάλλει στο τυχαίο σημείο Μ το δεύτερο «κύμα» όταν έχει διαδοθεί μόνο του, οι έννοιες της φάσης και της αρχικής φάσης είναι καθορισμένες με απόλυτη σαφήνεια, αρκεί να μην ξεχάσουμε το πεδίο ορισμού:

φάση της απομάκρυνσης στην εξίσωση ταλάντωσης (62)

$$\varphi = \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r_2}{\lambda} \quad \text{με} \quad t \geq \frac{r_2}{v}$$

αρχική φάση της απομάκρυνσης στην εξίσωση ταλάντωσης (62)

$$\varphi_0 = 0 \text{ rad}$$

Μετά τη «συμβολή των δύο κυμάτων», η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Μ είναι

$$y = y_1 + y_2 = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) + A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right) \quad \text{με} \quad t \geq \max \left(\frac{r_1}{v}, \frac{r_2}{v} \right) \quad (63)$$

Στη σχέση (63) οι έννοιες «φάση» και «αρχική φάση» δεν ορίζονται. Δεν υπάρχουν!!!!

Η κίνηση που αποδίδεται με τη σχέση (63) είναι επαλληλία των εξισώσεων κίνησης δύο αρμονικών ταλαντώσεων (επαλληλία δύο αρμονικών συναρτήσεων δηλαδή και όχι πραγματικών κινήσεων) ίδιας διεύθυνσης, ίδιας συχνότητας και ίδιας «θέσης ισορροπίας».

Είναι επαλληλία των συναρτήσεων y_1 και y_2 .

Η σύνθεσή τους, η y δηλαδή, είναι μια (πραγματική) αρμονική ταλάντωση ίδιας διεύθυνσης, ίδιας συχνότητας και ίδιας θέσης ισορροπίας με τις συνιστώσες εξισώσεις κίνησης ή καλύτερα με τους προσθετέους της (63).

Όπως είναι γραμμένη η εξίσωση (63), δεν έχουμε κανένα δικαίωμα να μιλάμε ούτε για «φάση» ούτε για «αρχική φάση».

Για να αποκτήσουμε αυτό το δικαίωμα, πρέπει να τη φέρουμε σε μορφή που να διαθέτει ένα μόνο τριγωνομετρικό αριθμό και δη ή μόνο ένα ημίτονο ή μόνο ένα συνημίτονο.

Με άλλα λόγια, αν θέλουμε να μιλάμε για φάση και αρχική φάση στην σχέση (63), εξίσωση συμβολής των κυμάτων, θα πρέπει να τη φέρουμε στη μορφή

$$y = A' \eta\mu(\omega t + \varphi'_0)$$

ή στη μορφή

$$y = A'' \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi''_0).$$

Τότε όμως,

- ✓ για να μην καταρρεύσουν αμφότεροι οι ορισμοί κι επομένως και οι έννοιες της φάσης και της αρχικής φάσης, θα πρέπει να φροντίσουμε η αρχική φάση να περιοριστεί σε ένα τριγωνομετρικό κύκλο
- ✓ για να αποφύγουμε κάθε επικίνδυνη ρευστότητα, θα πρέπει να τεθεί οπωσδήποτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
- ✓ για να μην υπάρξουν συλλογιστικά αδιέξοδα, θα πρέπει να ακολουθήσουμε με συνέπεια την πορεία που καταγράψαμε στα παραδείγματα 1-3 για τον υπολογισμό φάσης και αρχικής φάσης, ή έστω να εφαρμόσουμε τον απλό τρόπο που καταγράφεται στη σελίδα 14.

Ο μετασχηματισμός της (63), ώστε να περιέχει ένα μόνο τριγωνομετρικό αριθμό μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους:

1ος τρόπος: Χρησιμοποιώντας τους τύπους της επαλληλίας εξισώσεων κίνησης

Αν έχουμε αριθμητικά δεδομένα και δε θέλουμε να μπλεχτούμε με πολλά μαθηματικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους του σχολικού βιβλίου για την επαλληλία εξισώσεων αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, ίδιας συχνότητας και ίδιας θέσης ισορροπίας.

Τους τύπους αυτούς όμως θα πρέπει να ισχυροποιήσουμε, ώστε να συμπεριλάβουν περιπτώσεις όπου και οι δύο ταλαντώσεις έχουν αρχική φάση και να εμπλουτίσουμε με έναν επιπλέον τριγωνομετρικό αριθμό ή με κάποια επιπλέον μαθηματική μας δεξιότητα, μιας και η σχέση με την $\epsilon\varphi\theta$ μόνη της δε μπορεί να προσδιορίσει την αρχική φάση θ , έστω κι αν αυτή περιοριστεί σε έναν τριγωνομετρικό κύκλο.

(Επαλληλία εξισώσεων αρμονικών ταλαντώσεων)

$$\begin{aligned}
 x_1 &= A_1 \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_1) \quad \text{και} \quad x_2 = A_2 \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_2) \\
 x &= x_1 + x_2 = A \eta\mu(\omega t + \theta) \\
 \text{όπου} \quad A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad \eta\mu\vartheta = \frac{A_1 \eta\mu\varphi_1 + A_2 \eta\mu\varphi_2}{A} \\
 \varepsilon\varphi\vartheta &= \frac{A_1 \eta\mu\varphi_1 + A_2 \eta\mu\varphi_2}{A_1 \sigma\upsilon\nu\varphi_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu\varphi_2} \quad \sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{A_1 \sigma\upsilon\nu\varphi_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu\varphi_2}{A} \\
 &\quad \text{με} \quad 0 \leq \theta < 2\pi
 \end{aligned} \tag{64}$$

(Τέτοιου είδους αντιμετώπισεις έχουν ήδη καταχωρηθεί στο δίκτυο)

2ος τρόπος: Μετασχηματίζουμε την (63) και φτάνουμε στη μορφή

$$y = 2A \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right) \quad \text{με} \quad t \geq \max\left(\frac{r_1}{v}, \frac{r_2}{v}\right) \tag{65}$$

**Αφού φιλοδοξούμε η (65) να περιγράφει πραγματική κίνηση (κι όχι να είναι κα-
 νένας προσθετός σε επαλληλία εξισώσεων κίνησης) και επιθυμούμε οι έννοιες «φάση» και
 «αρχική φάση» να έχουν νόημα, θα πρέπει ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΑ να χειρι-
 στούμε την (65) με τους τρόπους που δείξαμε στα παραδείγματα 1-3.**

**Αν δηλαδή επιθυμούμε να βρούμε τη φάση και την αρχική φάση στην
 (65) θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΑ το πεδίο ορισμού
 της και τον περιορισμό της αρχικής φάσης σε ένα τριγωνομετρικό κύκλο.**

(Το να χειριστούμε τη σχέση (65) γενικά ώστε να εμφανιστούν γενικοί περιορισμοί στο πεδίο ορισμού και στην
 αρχική φάση του ενός τριγωνομετρικού κύκλου, νομίζω ότι θα είναι άσκοπο μιας και ο χρόνος που θα απαιτήσει
 η γραφή αυτή θα 'ναι μεγάλος και η αξία των τύπων ελάχιστη. Γι' αυτό καταφεύγω σε παραδείγματα)

4^ο παράδειγμα:

Έστω ότι σε κάποιο πρόβλημα συμβολής κυμάτων $y_1 = \dots$ και $y_2 = \dots$ αντικαθι-
 στούμε τα δεδομένα στην εξίσωση της συμβολής (65) και βρίσκουμε ότι το σημείο M που απέ-
 χει $r_1 = \dots$ και $r_2 = \dots$ από τις πηγές, ταλαντώνεται αρμονικά με εξίσωση

$$y = 10^{-1} \cdot \eta\mu\left(2\pi t - \frac{11\pi}{4}\right) \quad (SI) \quad \text{με} \quad t \geq 6 \text{ sec} \tag{66}$$

Να βρεθεί η φάση και η αρχική φάση της απομάκρυνσης του M στην (66).

Λύση

1ος τρόπος:

Κάνουμε ό,τι κάναμε στο παράδειγμα 2 στη σελίδα 10 ή στο παράδειγμα 3 στη σελίδα 12 αυτής της ανάρτησης.

2ος τρόπος:

Για πιο γρήγορα ακολουθούμε τα βήματα της σελίδας 14:

1ο βήμα: Μετασχηματίζουμε την εξίσωση κίνησης (66), ώστε **να εμφανιστεί η αρχική τιμή χρόνου 6 sec** μέσω της μορφής $\omega(t-t_0)=2\pi(t-6)$

$$x=10^{-1}\cdot\eta\mu\left[2\pi(t-6)+12\pi-\frac{11\pi}{4}\right] \quad t \geq 6 \text{ sec}$$

και τελικά

$$x=10^{-1}\cdot\eta\mu\left[2\pi(t-6)+\frac{37\pi}{4}\right] \quad (SI) \quad t \geq 6 \text{ sec} \quad (67)$$

2ο βήμα: Στο όρισμα του ημίτονου, μετά την ποσότητα $2\pi(t-6)$, **η «γωνία»** $\frac{37\pi}{4}$

δεν είναι μέσα στο διάστημα $[0, 2\pi]$ που έχουμε υιοθετήσει ως περιορισμό της αρχικής φάσης.

Επομένως πρέπει να αφαιρέσουμε κατάλληλα ακέραια πολλαπλάσια του 2π

$$x=10^{-1}\cdot\eta\mu\left[2\pi(t-6)+\frac{37\pi}{4}-4\cdot 2\pi\right] \quad (SI) \quad t \geq 6 \text{ sec}$$

από όπου τελικά

$$x=10^{-1}\cdot\eta\mu\left[2\pi(t-6)+\frac{5\pi}{4}\right] \quad (SI) \quad t \geq 6 \text{ sec} \quad (67\alpha)$$

3ο βήμα: Στην (67α) που καταλήξαμε με την παραπάνω διαδικασία

✓ η φάση είναι $\varphi=2\pi(t-6)+\frac{5\pi}{4}$ με $t \geq 6 \text{ sec}$

✓ και η αρχική φάση είναι $\varphi_0=\frac{5\pi}{4} \text{ rad.}$

Το ίδιο συνεπώς θα ισχύει και για την (67)

Βέβαια όλα τα παραπάνω μπορούν να γίνουν πολύ πιο γρήγορα, αρκεί να έχουμε στο μυαλό μας ότι για να βρούμε τη φάση και την αρχική φάση σε μια εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης την οποία μας έδωσαν ή στην οποία καταλήξαμε, θα πρέπει να τη μετασχηματίσουμε ώστε

- ✓ να εμφανίσουμε την αρχική τιμή του χρόνου με τη μορφή που είπαμε
- ✓ να εξασφαλίσουμε ότι ο προσθετός που δεν περιέχει χρόνο είναι σε διάστημα ενός τριγωνομετρικού κύκλου και μάλιστα στη μορφή που έχουμε επιλέξει για την αρχική φάση ($[0, 2\pi]$ ή $[-\pi, \pi]$ ή ..)

5^ο παράδειγμα:

Έστω ότι σε κάποιο πρόβλημα συμβολής κυμάτων $y_1=.....$ και $y_2=.....$ αντικαθιστούμε τα δεδομένα στην εξίσωση της συμβολής (65) και βρίσκουμε ότι το σημείο M που απέχει $r_1=.....$ και $r_2=.....$ από τις πηγές, ταλαντώνεται αρμονικά με εξίσωση

$$y = -10^{-1} \cdot \eta\mu\left(2\pi t - \frac{9\pi}{4}\right) \quad (SI) \quad \mu\epsilon \quad t \geq 0,5 \text{ sec} \quad (68)$$

Να βρεθεί η φάση και η αρχική φάση της απομάκρυνσης του M στην (68).

Λύση

Η (68) γίνεται διαδοχικά

$$y = -10^{-1} \cdot \eta\mu\left(2\pi t - \frac{9\pi}{4}\right) = 10^{-1} \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \pi - \frac{9\pi}{4}\right) = 10^{-1} \cdot \eta\mu\left(2\pi t - \frac{5\pi}{4}\right) = 10^{-1} \cdot \eta\mu\left[2\pi(t-0,5) - \frac{\pi}{4}\right]$$

και τελικά

$$y = 10^{-1} \cdot \eta\mu\left[2\pi(t-0,5) + \frac{7\pi}{4}\right] \quad (68\alpha)$$

Η (68α) έχει εμφανίσει την αρχική τιμή χρόνου $0,5 \text{ sec}$ στη μορφή που θέλουμε και προσθετό $\frac{7\pi}{4}$ που δεν περιέχει χρόνο t και βρίσκεται στο διάστημα $[0, 2\pi)$

Άρα η φάση και η αρχική φάση της (68) είναι ίδιες με εκείνες της (68α)

Δηλαδή

$$\underline{\text{Φάση}} \quad \varphi = 2\pi(t-0,5) + \frac{7\pi}{4} = 2\pi t + \frac{3\pi}{4} \quad \mu\epsilon \quad t \geq 0,5 \text{ sec}$$

$$\underline{\text{Αρχική φάση}} \quad \varphi_0 = \frac{7\pi}{4} \text{ rad}$$

Φάσεις και αντιφάσεις στη συμβολή

Ο **Νίκος (Ανδρεάδης)** με δύο ευφυέστατες αναρτήσεις

«Φάσεις και αντιφάσεις στη συμβολή»

«Φάσεις και αντιφάσεις στη συμβολή-Μέρος δεύτερο»

που βρίσκονται στη διεύθυνση

<http://ylikonet.gr/profiles/blogs/phhaseis-kai-antiphaseis-ste>

μας ώθησε να ακούσουμε κάποιους τριγμούς από την ψεύτικη πραγματικότητα των κυμάτων που διδάσκουμε.

Γράφει λοιπόν:

$$\dots\dots\dots N=6, r_1 = 1,5 \text{ m}, r_1 - r_2 = 6 \cdot \lambda, r_2 = 0,3 \text{ m}$$

Για $t \geq 3 \text{ s}$ η εξίσωση κίνησης προκύπτει από την επαλληλία των εξισώσεων:

$$y_1 = A \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) \text{ και } y_2 = A \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right).$$

Μετά από πράξεις:

$$y_1 = 0,1 \cdot \eta\mu(5\pi t - 15\pi) \text{ και } y_2 = 0,1 \cdot \eta\mu(5\pi t - 3\pi)$$

Σύμφωνα με τη σχέση $y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{\lambda} \pi\right)$, μετά από πράξεις προκύπτει:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu(5\pi t - 9\pi)$$

Η φάση (της απομάκρυνσης στην παραπάνω εξίσωση) δίνεται από τη σχέση $\varphi = 5\pi t - 9\pi$

Για $t = 3 \text{ s}$ (προκύπτει η αρχική) φάση (η οποία) είναι $6\pi \text{ rad}$.

.....παρατηρούμε ότι 7 σημεία του μέσου τα οποία ξεκινούν την ίδια στιγμή, την ίδια κίνηση, από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, περιγράφονται με διαφορετικές εξισώσεις και την στιγμή της εκκίνησης έχουν διαφορετική φάση!!!

Οι απορίες μου:

- ✓ Ποιο είναι το φυσικό νόημα των τιμών **0π, 2π, 4π, 6π, και 8π;**
- ✓ Έχει νόημα να ζητήσουμε τη διαφορά φάσης ενός από αυτά τα σημεία με μια πηγή;

Αν όμως δούμε το θέμα ως σύνθεση δύο ταλαντώσεων που βρίσκονται σε συμφωνία φάσης, καταλήγουμε αμέσως στο συμπέρασμα ότι **και στις 7 περιπτώσεις** η κίνηση για $t \geq 3 \text{ s}$ περιγράφεται από την εξίσωση: $y = 0,2 \cdot \eta\mu(5\pi t - 15\pi)$ (SI)

Η φάση δίνεται από τη σχέση $\varphi = 5\pi t - 15\pi$ (SI)

Για $t = 3 \text{ s}$ η (αρχική) φάση είναι **0π rad**. Δηλ. τη στιγμή της εκκίνησης έχουμε **μηδενισμό της φάσης για τα 7 σημεία**, κάτι λογικό αφού τότε και τα 7 ξεκινούν μια νέα κίνηση από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα.....»

Στους προβληματισμούς που έθεσε ο Νίκος θα επιχειρήσω μια τοποθέτηση:

Κατά τη γνώμη μου, το μόνο που μπορεί να μας γλιτώσει από το παραπάνω παράδοξο είναι **η μαθηματική αυστηρότητα**, με την οποία φροντίσαμε να εφοδιάσουμε (και έτσι πρέπει να γίνεται πάντα, αν και πολλές φορές τούτο το απλό το ξεχνάμε) τους ορισμούς φάση και αρχική φάση.

Η αντίρρησή μου επικεντρώνεται στη φράση

«...η φάση στην εξίσωση $y = 0,2 \cdot \eta\mu(5\pi t - 9\pi)$ δίνεται από τη σχέση $\varphi = 5\pi t - 9\pi$...»

η οποία εξάλλου είναι και η υπεύθυνη για τις αντιφάσεις που έχει εντοπίσει ο Νίκος.

Προκειμένου να βρεθούν η φάση και η αρχική φάση στην εξίσωση μιας αρμονικής ταλάντωσης, πρέπει να ακολουθηθούν ορισμένες διαδικασίες.

Αυτό δεν είναι ούτε σωσίβιο, ούτε σοφιστεία, ούτε κάποια κίνηση απελπισίας... Είναι η ουσία του ορισμού που υιοθετήσαμε για τις δύο αυτές έννοιες.

Η αυστηρότητα των ορισμών που δώσαμε ως φυσικοί, εξασφαλίζει ότι τα μαθηματικά όχι μόνο θα μπορέσουν να εγγυηθούν τη συνέπεια των συλλογισμών και αποτελεσμάτων μας, αλλά θα ενσωματώσουν μέσα τους τελείως διαφανείς πορείες, απαραίτητες για την αυτοδυναμία και ισχύ του φυσικού, έστω κι αν ένας μαθηματικός αδιαφορήσει τελείως γι' αυτές.

Αυτό δεν είναι παραλογισμός, αλλά συνειδητοποίηση του διαφορετικού ρόλου και της διαφορετικής ευθύνης των δύο ειδικοτήτων του φυσικού και του μαθηματικού

Κοντολογία:

Προκειμένου να διατηρήσουμε το δικαίωμα να χρησιμοποιούμε στο λεξιλόγιό μας τις λέξεις φάση και αρχική φάση, επιβάλλεται από τα μαθηματικά να είμαστε συνεπείς με τους ορισμούς που τους δώσαμε και να τις χειριζόμαστε με ειδικό τρόπο, σε καθορισμένες πορείες.

Αν δε το κάνουμε αυτό, τα μαθηματικά θα μας γυρίσουν την πλάτη κι εμείς θα βουλιάξουμε στις παρανοήσεις, στα αδιέξοδα και τις λογικές ασυνέπειες.

Σύμφωνα λοιπόν με όσα έχουν αναφερθεί, για να βρούμε τη φάση και την αρχική φάση στην εξίσωση κίνησης

$$y=0,2\cdot\eta\mu(5\pi t-9\pi) \quad \text{με} \quad t\geq 3 \text{ sec} \quad (69)$$

πρέπει να εμφανίσουμε μέσα της την αρχική τιμή του χρόνου 3 sec και να αφαιρέσουμε τα ακέραια πολλαπλάσια του 2π με τέτοιο τρόπο, ώστε η αρχική φάση να είναι μέσα στη μορφή του τριγωνομετρικού κύκλου που υιοθετήσαμε.

Πράγματι η (69) γίνεται

$$y=0,2\cdot\eta\mu(5\pi t-9\pi)=0,2\cdot\eta\mu[5\pi(t-3)+6\pi]$$

και τελικά

$$y=0,2\cdot\eta\mu[5\pi(t-3)+0] \quad \text{με} \quad t\geq 3 \text{ sec} \quad (69\alpha)$$

Η (69α) και κατά συνέπεια και η (69) έχουν

$$\underline{\text{Φάση}} \quad \varphi=5\pi(t-3)+0=5\pi t-15\pi \quad \text{με} \quad t\geq 3 \text{ sec}$$

$$\underline{\text{Αρχική φάση}} \quad \varphi_0=0 \text{ rad}$$

Νομίζω ότι τώρα πια δεν υπάρχει καμιά αντίφαση, μιας και όλες οι συλλογιστικές και όλες οι μαθηματικές πορείες θα δώσουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα:

α) Και τα επτά σημεία $N=0, \dots$ έχουν την ίδια φάση $\varphi=5\pi t-15\pi$ με $t\geq 3 \text{ sec}$ και την ίδια αρχική φάση $\varphi_0=0 \text{ rad}$

β) Υπάρχει απόλυτη συλλογιστική συνέπεια σε όλα, αφού όπως έχει ήδη επισημάνει ο Νίκος «...και τα 7 σημεία πρέπει να έχουν την ίδια φάση και αρχική φάση, αφού ξεκινούν μια νέα κίνηση από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα...»

γ) Είτε χρησιμοποιηθούν οι τύποι σύνθεσης ταλαντώσεων, είτε χρησιμοποιηθεί ο τύπος της συμβολής κυμάτων, είτε οποιαδήποτε άλλη μαθηματική διαδρομή, τα αποτελέσματα φάσης και αρχικής φάσης θα είναι απολύτως ίδια.

δ) «...Κάθε κίνηση έχει φάση που μας πληροφορεί για πόσο χρόνο παρακολουθούμε τη συγκεκριμένη κίνηση...».

ε) Απορία:

«Ποιο είναι το φυσικό νόημα των τιμών 0π , 2π , 4π , 6π , και 8π ;»

Απάντηση:

«...οι τιμές 0π , 2π , 4π , 6π , και 8π που προκύπτουν με (απλή-ανώδυνη) εφαρμογή της γνωστής σχέσης $\eta\mu A + \eta\mu B = \dots$ δεν έχουν κανένα γνωστό ωφέλιμο φυσικό νόημα...».

Η εφαρμογή της σχέσης $\eta\mu A + \eta\mu B = \dots$ δεν οδηγεί πάντα απευθείας σε σχέση στην οποία να είναι άμεσα διαφανείς η φάση και η αρχική φάση μιας εξίσωσης αρμονικής κίνησης.

Ο τελικός τύπος χρειάζεται οπωσδήποτε επεξεργασία.

στ) Απορία:

«Έχει νόημα να ζητήσουμε τη διαφορά φάσης ενός από αυτά τα σημεία με μια πηγή;»

Απάντηση:

Όχι!!!

Δεν πρέπει να ζητήσουμε τέτοιο πράγμα αν δε είμαστε έτοιμοι να αυτοκτονήσουμε ή να μπορούμε σε ατέλειωτες μαθηματικές αναζητήσεις για να γλιτώσουμε μόνο και μόνο τη συνέπεια, της εννοιολογικά λανθασμένης «πραγματικότητας» των κυμάτων που διδάσκουμε!!!!

Η παρουσία πηγών επιβάλλει άλλου είδους κύματα εμπλουτισμένα και με άλλες έννοιες και με μαθηματικούς χειρισμούς αρκετά δύσκολους, μιας και στις διαφορικές εξισώσεις πρέπει να παρθούν υπόψη συννοητικοί περιορισμοί.

Στην πρώτη σελίδα της ανάρτησής μου «**Ορισμοί και εξισώσεις κίνησης γ' μέρος**» έγραφα κάτι που όσο περνάει ο καιρός το πιστεύω όλο και πιο πολύ:

«.....διδάσκουμε "κύματα" που δήθεν διαδίδονται με ταχύτητα v , έχουν αρχικές φάσεις, έχουν πηγές που τα παράγουν και πολλές φορές δύο πηγές για να έχουμε συμβολή.

Μα αυτά που διδάσκουμε ούτε κύματα είναι, ούτε διαδίδονται, ούτε πηγές περιέχουν, ούτε είναι κάπου και τρέχουν να πάνε κάπου αλλού, ούτε ξεκινάνε από κάπου, ούτε.... ούτε.... ούτε....

Στα κεφάλαια "Κύματα" και "Μηχανική Στερεού Σώματος" της Φυσικής Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, ειλικρινά με πιάνει απελπισία... Τα πράγματα εκεί σκοτεινιάζουν τόσο πολύ... Τί να πεις και από πού να αρχίσεις;»

Στο σημείο αυτό όμως νιώθω υποχρεωμένος να τονίσω ότι η αρνητικότερη στάση μου απέναντι σε αυτό που μας βάζουν να διδάσκουμε ως κύματα, δεν πρέπει στο ελάχιστο να θεωρηθεί ως απόρριψη της προσπάθειας συναδέλφων να μας δώσουν ένα πλήθος ασκήσεων, θέσεων, αναλύσεων, διαγωνισμάτων κ.λ.π. που έχουν σχέση με κύματα και με συμβολή κυμάτων που περιέχουν πηγές.

Στο σχολείο πρέπει να κάνουμε αυτό που επιτάσσουν οι πανελλαδικές. Άρα πέρα από όλες τις διαφωνίες μεταξύ μας, θα πρέπει προσωπικά να βρω ασκήσεις και θέματα να δώσω στα παιδιά για να καλύψω την ανήθικη έλλειψη ασκήσεων από το σχολικό βιβλίο.

Επίσης θα πρέπει να βρω τρόπο να μην καταρρεύσει η συλλογιστική των παιδιών, έστω και σαθρή, πριν τις εξετάσεις.

Αυτό με τη σειρά του σημαίνει, ότι πρέπει να έχω επιχειρήματα και υλικό κομμένο στις συγκεκριμένες ανάγκες τους.

Σε αυτό το σημείο, η βοήθεια που μου πρόσφεραν και μου προσφέρουν οι συνάδελφοι του δικτύου και κάποια αξιόλογα εξωσχολικά βιβλία είναι όχι απλά πολύτιμη, αλλά ανεπανάληπτη.

Με πολύ ανακούφιση δέχομαι και παίρνω πολύτιμα διαγωνίσματα, ασκήσεις και υλικό που προσφέρουν απλόχερα διάφοροι συνάδελφοι και που αναφέρονται σε κύματα που προέρχονται από πηγές και που συμβάλλουν.

Επί τη ευκαιρία τους ευχαριστώ που μου δίνουν τον κόπο τους. Κάποιες φορές μάλιστα αποτελεί πηγή αναθεωρήσεων και καινούριων αναζητήσεων μου.

Ε. Παρατηρήσεις

1) Η εξίσωση της αρμονικής ταλάντωσης την οποία θα μας δώσουν ή στην οποία θα καταλήξουμε μετά από κάποια μαθηματική επεξεργασία δεν είναι υποχρεωμένη να δηλώνει καθαρά τη φάση και την αρχική φάση. Εκείνο που πρέπει οπωσδήποτε να επισημάνουμε είναι ότι φάση δεν είναι η ποσότητα που βρίσκεται μέσα στον τριγωνομετρικό αριθμό.

Η εύρεση της φάσης και της αρχικής φάσης θέλουν διαδικασία η οποία θα απαιτήσει το πεδίο ορισμού της εξίσωσης που μας δίνουν για την ταλάντωση ή για το κύμα.

Ας του δώσουμε έμφαση με **μια άσκηση χωρίς κανένα απολύτως νόημα:**

Στην παρακάτω εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης να βρεθεί η φάση και η αρχική φάση της απομάκρυνσης

$$y=10^{-1}\cdot\eta\mu\left(2\pi t - \frac{11\pi}{4}\right)$$

Ο λόγος που αυτή η άσκηση είναι α-νόητη, είναι γιατί δεν έχει δοθεί το πεδίο ορισμού. Αλλάζοντας το πεδίο ορισμού, όπως ήδη έχουμε δείξει, θα αλλάξει τόσο η συνάρτηση της φάσης όσο και η τιμή της αρχικής φάσης. (Δες σελίδα 18).

2) Η εύρεση της διαφοράς φάσης ανάμεσα σε δύο μεγέθη του ίδιου φαινομένου είναι ακόμη πιο επίπονη διαδικασία.

Το θέμα αυτό είχε θέσει ο **Θοδωρής** με μια ανάρτησή του που βρίσκεται στη διεύθυνση <http://ylikonet.gr/group/themata/forum/topics/phhasearchikhe-phhasediaphorha?commentId=3647795%3AComment%3A16659&groupId=3647795%3AGroup%3A5901>
Όπως στην περίπτωση της φάσης και αρχικής φάσης οι αρμονικές συναρτήσεις πρέπει να «ετοιμαστούν», έτσι και στην περίπτωση που μας ζητάνε να βρούμε διαφορά φάσης ανάμεσα σε δύο φυσικά μεγέθη που εκφράζονται με αρμονικές συναρτήσεις, οι συναρτήσεις αυτές πρέπει οπωσδήποτε να ετοιμαστούν κατάλληλα.

3) Το πιο σημαντικό στο οποίο εστιάζουν οι εργασίες μου (άσχετα αν τα καταφέρνω να το δείξω ή όχι) είναι η μεθοδολογία που πρέπει να ακολουθούμε όταν θέλουμε να λύσουμε μια διαφωνία μας, να προχωρήσουμε μια αναζήτησή μας, να βρούμε διέξοδο σε μια αντίφαση, να συνειδητοποιήσουμε μια έννοια.

Κατά τη γνώμη μου, πρέπει να ξεκινάμε από τους ορισμούς και αφού εξασφαλίσουμε την αυστηρότητά τους να προχωρήσουμε σε απλές έστω, εννοιολογικές κατακτήσεις, απαραίτητες όμως για την αναπνοή μας ως φυσικών ή ως ενδιαφερομένων για τη φυσική.

«...Η αξία των ορισμών εντοπίζεται στη σωστή θέση που πρέπει να κατέχουν κατά τη συνεννόηση μεταξύ των φυσικών και στον κορυφαίο και αναντικατάστατο ρόλο που πρέπει, με κάθε σεβασμό να αποδεχτούμε, ότι διαδραματίζουν στη διαμόρφωση της δομής της γλώσσας που χρησιμοποιεί η Φυσική.

Δεν γίνεται να κάνεις Φυσική αν δεν έχεις τα σωστά, κατάλληλα λόγια για να περιγράψεις στους άλλους το όμορφο.

Η Φυσική έχει ορισμούς που δεν είναι διαπραγματεύσιμοι και μαθηματικές μεθοδολογίες που δεν πρέπει να αγνοούνται, αν θέλουμε να έχουμε συνέπεια και να εξασφαλίζουμε απόλυτη διαφάνεια στους συλλογισμούς μας.

Δεν πρέπει να χαλάμε τη γλώσσα, γιατί αλλιώς χαλάει η σκέψη και η επικοινωνία μεταξύ μας.

Πρέπει να δεχτούμε στην ψυχή μας (όχι στα λόγια) ότι οι ορισμοί έχουν αξία και να συνειδητοποιήσουμε την μοναδική τους ιδιότητα Αυτή που είναι και η αιτία της ύπαρξής τους: Να είναι χρήσιμοι!!! Οι ορισμοί ή είναι χρήσιμοι ή δεν υπάρχουν.

Τα λόγια της Φυσικής δε φτιάχτηκαν για να περιγράφουν, αλλά για να έχουν συγχρόνως τη δυνατότητα και να προφητεύουν.....»

4) Στο παράδειγμα του Νίκου για τις φάσεις και τις αντιφάσεις χρησιμοποιήθηκαν σημεία όπου είχαμε ενισχύσεις.

Θα παρακαλούσα το Νίκο, αλλά και όποιον άλλο συνάδελφο θέλει, **να κάνει μια άσκηση ή μια προσομοίωση** με πιο γενικά σημεία στη συμβολή κυμάτων και να υπολογίσει τις φάσεις και τις αρχικές φάσεις στην εξίσωση ταλάντωσης των σημείων αυτών δίνοντας έμφαση πάντα το πεδίο ορισμού και στον περιορισμό της αρχικής φάσης σε έναν τριγωνομετρικό κύκλο π.χ. της μορφής $[0, 2\pi)$.

Πιστεύω ότι έτσι κάποια πράγματα θα γίνουν πολύ πιο ευδιάκριτα, πιο απλά και το κυριότερο θα περάσουν πιο εύκολα στους συναδέλφους.

5) Τελειώνοντας οφείλω να πω ότι η σημερινή μου ανάρτηση ουσιαστικά οφείλεται στους προβληματισμούς που μας έθεσε ο Νίκος (Ανδρεάδης) πάνω στη συμβολή των κυμάτων με το «Φάσεις και αντιφάσεις στη συμβολή».

Έχοντας ξεκινήσει να γράφω μια σειρά αναρτήσεων σχετικών με τις έννοιες φάση και αρχική φάση, μου ήρθε ανέλπιστα η δουλειά του Νίκου, η οποία με τα ερωτήματα που έθεσε, τη συζήτηση που ακολούθησε και τις γνώμες που διατυπώθηκαν, μου έδωσε ισχυρά επιχειρήματα **να υποστηρίξω την απόλυτη πίστη μου στην αξία των ορισμών, όχι ως απλή λεκτική επανάληψη μιας υποχρεωτικής αποστήθισης, αλλά ως συνειδητοποίηση όλης εκείνης της**

εσωτερικής λειτουργίας απόλυτα συγκεκριμένων πραγμάτων, που κρίνουν τους ορισμούς ως χρήσιμους και απαραίτητους και τους γεννούν, για να υπάρχουν και να πλουτίζουν τη γλώσσα μας.

Τους βάζουν δίπλα μας και μας καλούν να πιστέψουμε στην αξία τους και ποτέ να μην τους υποτιμήσουμε όσο απλοί και να είναι.

(συνεχίζεται)

Σάββατο, 29 Ιανουαρίου 2011

*Θρασύβουλος Κων. Μαχαίρας
Γενικό Λύκειο Αγριάς Πηλίου*

s7-kmgh@otenet.gr