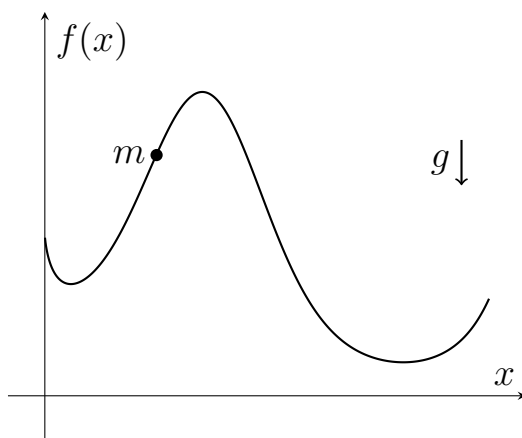


# Καθορισμένη Τροχιά Χάντρας

Ζοπόγλου Βασίλειος

## Περιγραφή της Διάταξης

Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε μια χάντρα μάζας  $m$ , χωρίς διαστάσεις, περασμένη σε ένα σύρμα, με το οποίο δεν εμφανίζει τριβή, τυχαίου σχήματος  $f(x)$ . Η διάταξη τοποθετείται σε ομοιόμορφο πεδίο βαρύτητας επιτάχυνσης  $\vec{g}$ .



Σε αυτό το άρθρο θα μελετήσουμε την κίνηση της χάντρας στο σύρμα για κάποιες αυθαίρετες αρχικές συνθήκες (Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων),

$$(x(0), f(0)) = (x_0, f_0) \quad (\dot{x}(0), \dot{f}(0)) = (v_{0,x}, v_{0,f})$$

## Η μέθοδος της ΑΔΕ

Η πιο εύκολη μέθοδος είναι η χρήση της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας. Χρησιμοποιώντας το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων έχουμε,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mg(f + c) = \frac{1}{2}m(\dot{f}^2 + \dot{x}^2) + mg(f + c)$$

όπου  $c$  μια σταθερά που εξαρτάται από το επίπεδο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας. Η Ενέργεια όμως στο σύστημα διατηρείται ανεξαρτήτως του χρόνου και επομένως,

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m(2\dot{f}\ddot{f} + 2\dot{x}\ddot{x}) + mg\dot{f} = 0$$

απο όπου παίρνουμε,

$$\dot{f}(\ddot{f} + g) + \dot{x}\ddot{x} = 0$$

Εκτελούμε τις πράξεις βάσει του κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης,

$$\dot{f} = f'\dot{x} \quad \ddot{f} = f''\dot{x}^2 + f'\ddot{x}$$

άρα τελικά,

$$f'\dot{x}(f''\dot{x}^2 + f'\ddot{x} + g) + \dot{x}\ddot{x} = 0 \quad (1)$$

## Η μέθοδος της Λαγκρανζιανής Μηχανικής

Ένας λίγο πιο απαιτητικός τρόπος είναι η χρήση της Λαγκρανζιανής Μηχανικής. Ας θέσουμε το ίδιο σύστημα αναφοράς,

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - mg(f + c) = \frac{1}{2}m(\dot{f}^2 + \dot{x}^2) - mg(f + c)$$

Τροποποιούμε την εξίσωση Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

και υπολογίζουμε τα ξεχωριστά μέλη της ανεξάρτητα,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}m \left( \frac{\partial \dot{f}^2}{\partial \dot{x}} + 2\dot{x} \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}m \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{f}^2}{\partial \dot{x}} + 2\ddot{x} \right) \quad \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2}m \frac{\partial \dot{f}^2}{\partial x} - mg \frac{\partial f}{\partial x}$$

Άρα απο την 2,

$$\frac{\partial \dot{f}^2}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{f}^2}{\partial \dot{x}} = 2 \left( \ddot{x} + g \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (3)$$

Η 3 ενδέχεται περαιτέρω απλοποίηση, πάλι βάσει του κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης. Αντικαθιστώντας και εκτελώντας τις πράξεις τελικά παίρνουμε,

$$f'(f''\dot{x}^2 + f'\ddot{x} + g) + \ddot{x} = 0 \quad (4)$$

η οποία διαφορική αποτελεί μια ειδική περίπτωση της 1 σε περίπτωση που ξέρουμε ότι  $\dot{x} \neq 0$

## Δεν Λύνονται όλες οι Διαφορικές Εξισώσεις

Οι ισότητες 1 και 4, αν μας δοθεί η  $f(x)$ , αποτελούν διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως με εξαρτημένη μεταβλητή την  $x(t)$  (ή την  $f(t)$  αν είμαστε περίεργοι) και ανεξάρτητη, τον χρόνο. Ξέρουμε ότι είναι δευτέρας τάξεως γιατί βασική προϋπόθεση ώστε να υπάρχει λύση είναι να δίνονται οι δύο αυθαίρετες αρχικές συνθήκες. Ωστόσο δεν είναι πάντα επιλύσιμες. Για την

ακρίβεια, τις περισσότερες φορές είμαστε αναγκασμένοι να καταφύγουμε σε προσεγγιστικές μεθόδους. Η πιο ευρέως εφαρμοσμένη είναι η χρήση της σειράς Taylor,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n \quad (5)$$

Μάλιστα, αν οι αρχικές συνθήκες μας δίνονται στο  $t_0 = 0$ , η 5 απλοποιείται και διευκολύνει το επίπονο έργο μας! Ωστόσο, υπάρχουν ορισμένες τακτικές μπορούν να απλοποιήσουν τις εν λόγω διαφορικές. Για την ακρίβεια, φαίνεται ξεκάθαρα ότι καμία από τις δύο δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο (ως μεταβλητή  $t$ ) και επομένως μπορούμε, εφόσον μας δοθεί η  $f(x)$ , να εκτελέσουμε τις δυνατές απλοποιήσεις και μετέπειτα την αντικατάσταση

$$\dot{x}(t) = r(x)$$

όπου  $r(x)$  μια νέα συνάρτηση που εξαρτάται άμεσα από την  $x(t)$ . Έτσι, όπου  $\dot{x}$  γράφουμε  $r$  και όπου  $\ddot{x}$  γράφουμε  $r'$  ( $r'$  σημαίνει παραγωγή ως προς  $x$ ) πάλι βάσει του κανόνα της αλυσιδωτής παραγωγής. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει μια καινούρια, ίσως επιλύσιμη διαφορική πρώτης τάξεως όπου αντιμετωπίζουμε την  $x$  ως ανεξάρτητη μεταβλητή! (Η επακόλουθη διαδικασία είναι αυτονόητη.)

## Ο Χρόνος Κίνησης

Ονομάσαμε την παραπάνω διαδικασία, μελέτη της διάταξης. Ωστόσο μπορούμε, χωρίς να μπλέξουμε με εξισώσεις κίνησης, να υπολογίσουμε τον χρόνο που απαιτείται για να μεταφερθεί το σώμα από το σημείο  $(x_0, f_0)$  σε ένα άλλο με συντεταγμένες,  $(x_i, f(x_i))$  που να 'ανήκει' στην  $f(x)$ . Εφαρμόζουμε ΑΔΕ,

$$v = \sqrt{c - 2gf}$$

Το απειροστό μήκος της διαδρομής που ακολουθεί το σώμα μεταξύ δύο σημείων που μόλις και μετά βίας ταυτίζονται είναι,

$$ds = \sqrt{1 + f'^2} dx$$

Επομένως μπορούμε εζ' ορισμού,

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + f'^2}}{\sqrt{c - 2gf}} dx \Rightarrow \tau = \int_{x_0}^{x_i} \frac{\sqrt{1 + f'^2}}{\sqrt{c - 2gf}} dx \quad (6)$$

Εδώ το  $c$  είναι μια αυθαίρετη σταθερά που προσδιορίζεται από την αρχική θέση και την αρχική ταχύτητα του σώματος

$$c = \frac{2E}{m} = v_0^2 + 2gf(x_0)$$

Το ολοκλήρωμα 6 είναι στην πραγματικότητα ένα συναρτησοειδές ως προς την  $f$ .