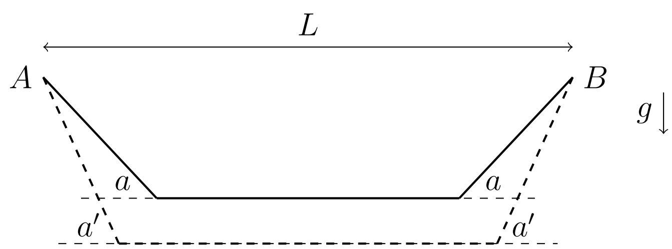
Το Απλοποιημένο Πρόβλημα του Βραχυστοχρόνου

Ζοπόγλου Βασίλειος

Θεωρούμε τρεις διαδοχικές ράμπες με τις επικλινείς να έχουν το ίδιο μήκος και ίδια γωνία κλίσης a με την οριζόντιο. Ένα μικρό σώμα, το οποίο θεωρείται υλικό σημείο, αφήνεται απο το σημείο A, με μηδενική αρχική ταχύτητα σε ομοιόμορφο πεδίο βαρύτητας επιτάχυνσης $\vec{g}$ και φτάνει στο B, όπου ακινητοποιείται στιγμιαία, σε χρόνο τ. Η μεσαία ράμπα είναι οριζόντια, δεν υπάρχουν τριβές και μεταβάλλοντας την γωνία a, αλλάζει το μήκος όλων των ραμπών.



Για ορισμένη απόσταση $AB = L$, να βρείτε την γωνία a που ελαχιστοποιεί τον χρόνο τ λαμβάνοντας υπόψην ότι τα σημεία A και B είναι ακλόνητα. Η μορφή της διάταξης για μια γωνία $a' > a$, διαγράφεται με διακεκομμένες γραμμές στο σχήμα. [1]

Λύση: Ορίζουμε ℓ, το μήκος κάθε ράμπας και j $(L - 2\ell\cos a)$, το μήκος του οριζοντίου επιπέδου. Είμαστε αναγκασμένοι να μελετήσουμε την κίνηση του σώματος σε κάθε τμήμα ξεχωριστά,

$$\tau = \Delta t_i + \Delta t_h + \Delta t_i'$$

[1] Βαλκανική Ολυμπιάδα Φυσικής 2022

όπου η σειρά των όρων ταυτίζεται με τις διαδοχικές κινήσεις του σώματος. Όμως λόγω συμμετρίας, $\Delta t_i = \Delta t_i'$ και συνεπώς,

$$\tau = 2\Delta t_i + \Delta t_h \tag{1}$$

Εφόσον σε όλη την διαδρομή δεν υπάρχει τριβή,

$$|\alpha_\ell| = g \sin a$$

Άρα θα έχουμε,

$$\Delta t_i = \sqrt{\frac{2\ell}{g \sin a}} \tag{2}$$

Η κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο θα είναι ευθύγραμμη ομαλή με ταχύτητα $v_h = \sqrt{2g\ell \sin a}$. Έπεται,

$$\Delta t_h = \frac{j}{\sqrt{2g\ell \sin a}} \tag{3}$$

Δεν μένει παρά συνδυάζοντας τις 1, 2 και 3, να καταλήξουμε στην τελική έκφραση για τον ολικό χρόνο τ,

$$\tau = 2\sqrt{\frac{2\ell}{g \sin a}} + \frac{L - 2\ell \cos a}{\sqrt{2g\ell \sin a}} \tag{4}$$

Η 4 είναι μια συνάρτηση 2 μεταβλητών ($\tau = \tau_{(\ell,a)}$), η οποία είναι συνεχής και ορίζεται στους περιορισμούς του προβλήματος για $0 < a < \pi/2$, καθώς επίσης μπορούμε άνετα να ισχυριστούμε πως $\ell \neq 0$, ώστε η βασική μας σχέση να έχει φυσικό νόημα. Γενικά, για την εύρεση των ακροτάτων μιας συνάρτησης δύο ή περισσότερων μεταβλητών, θέτουμε τις μερικές παραγώγους της, ως προς κάθε αντίστοιχη μεταβλητή της, ίσες με το μηδέν, και λύνουμε το σύστημα που προκύπτει, το οποίο αποτελείται απο εξισώσεις τόσες, όσες και οι μεταβλητές της συνάρτησης. Αυτό θα κάνουμε και στην παρούσα κατάσταση. Ας ξεκινήσουμε υπολογίζοντας την $\partial\tau/\partial\ell$. Θα είναι,

$$\frac{\partial \tau}{\partial \ell} = 2\sqrt{\frac{2}{g \sin a}} \frac{\partial}{\partial \ell}\left(\sqrt{\ell}\right) + \frac{1}{\sqrt{2g \sin a}} \frac{\partial}{\partial \ell}\left(\frac{L - 2\ell \cos a}{\sqrt{\ell}}\right)$$

Εκτελώντας τις πράξεις,

$$\frac{\partial \tau}{\partial \ell} = \sqrt{\frac{2}{\ell g \sin a}} - \frac{1}{\sqrt{2g\ell \sin a}} \frac{L + 2\ell \cos a}{2\ell} \tag{5}$$

και θέτοντας $\partial\tau/\partial\ell = 0$, έχουμε

$$\sqrt{\frac{2}{\ell_0 g \sin\phi}} = \frac{1}{\sqrt{2g\ell_0 \sin\phi}} \frac{L + 2\ell_0 \cos\phi}{2\ell_0}$$

απο όπου τελικά προκύπτει,

$$\ell_0 = \frac{L}{2\,(2-\cos\phi)} \tag{6}$$

Για να αντιληφθούμε την σημασία της 6, εκφράζει την σχέση των συγκεκριμένων τιμών που παίρνουν οι μεταβλητές ℓ και a όταν ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι ελάχιστος (τ_f). Συμβολικά, αντίστοιχα θα είναι οι τιμές ℓ_0 και ϕ αντίστοιχα. Ας υπολογίσουμε τώρα παρομοίως την $\partial\tau/\partial a$,

$$\frac{\partial\tau}{\partial a} = 2\sqrt{\frac{2\ell}{g}} \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\sqrt{\sin a}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2g\ell}} \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{L - 2\ell\cos a}{\sqrt{\sin a}}\right)$$

Από όπου εκτελώντας τις πράξεις θα έχουμε,

$$\frac{\partial\tau}{\partial a} = 2\sqrt{\frac{2\ell}{g}}\left(-\frac{\cos a}{2\sqrt{\sin^3 a}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2g\ell}} \frac{4\ell(1-\cos^2 a) - (L - 2\ell\cos a)\cos a}{2\sqrt{\sin^3 a}}$$

Αν τώρα θέσουμε $\partial\tau/\partial a = 0$, προκύπτει,

$$4\ell_0 \cos\phi = 4\ell_0 - 2\ell_0 \cos^2\phi - L\cos\phi \tag{7}$$

Τελικά, αντιμετωπίζοντας τις 6 και 7 ως σύστημα, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$\cos\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3}\, rad = 60^\circ$$

Τώρα μένει απλά να αποδείξουμε ότι όταν $a = \phi$, και συνεπώς απο την 6,

$$\ell_0 = \frac{L}{3} > 0$$

ο συνολικός χρόνος κίνησης παίρνει την ελάχιστη και όχι την μέγιστη τιμή του. Το δεύτερο αν και δεν θα έβγαζε φυσικό νόημα στο σύστημα, μπορεί να απορριφθεί αποδεικνύοντας ότι

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial\ell^2} > 0 \qquad \acute{\eta} \qquad \frac{\partial^2\tau}{\partial a^2} > 0$$

για $a = \phi$ και $\ell = \ell_0$.