ΜΙΧΑΛΟΥΔΗΣ ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ ΣΑΜΑΡΑΣ ΣΤΑΥΡΟΣ ΣΑΡΡΗΓΙΑΝΝΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΦΥΣΙΚΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΝΩΣΗ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

Κυριακή 15 Μαΐου 2022

ΘΕΜΑ Α

*Στις ερωτήσεις **Α1-Α4** να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση.*

Α1. Ένα αγώγιμος κυκλικός δακτύλιος βρίσκεται ολόκληρος μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης σταθερού μέτρου Β, οι δυναμικές γραμμές του οποίου είναι κάθετες στο επίπεδο του δακτυλίου. Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ αρχίζει να περιστρέφεται ο δακτύλιος γύρω από μία διάμετρό του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Την ίδια χρονική στιγμή αρχίζει να περιστρέφεται και το ομογενές μαγνητικό πεδίο με την ίδια γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, έτσι ώστε οι δυναμικές του γραμμές να είναι συνεχώς κάθετες στο δακτύλιο. Ο δακτύλιος βρίσκεται συνεχώς ολόκληρος μέσα στο μαγνητικό πεδίο. Η τάση από επαγωγή υ στο δακτύλιο

α. ισούται με 0

β. δίνεται από τη σχέση $\upsilon = V \cdot \eta\mu\omega t$

γ. είναι σταθερή και διάφορη του μηδενός

δ. είναι ανάλογη του χρόνου

Μονάδες 5

Α2. Σώμα (Σ1) μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα και προσκρούει σε ακίνητο σώμα (Σ2) μάζας m_2. Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική. Μετά την κρούση το σώμα (Σ2) παραμένει ακίνητο. Για τις μάζες ισχύει

α. $m_1 = m_2$ **β.** $m_2 = 3m_1$ **γ.** $m_1 << m_2$ **δ.** $m_2 << m_1$

Μονάδες 5

Α3. Σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση κυκλικής συχνότητας ω. Μία χρονική στιγμή που η κινητική ενέργεια Κ και η δυναμική ενέργεια U του σώματος δίνονται από τη σχέση $K = 3U$, η απόλυτη τιμή της στιγμιαίας ισχύος P της συνισταμένης δύναμης ισούται με

α. $U \cdot \omega$ **β.** $2 \cdot U \cdot \omega$ **γ.** $\sqrt{3} \cdot U \cdot \omega$ **δ.** $2\sqrt{3} \cdot U \cdot \omega$

Μονάδες 5

Α4. Υδραυλικό πιεστήριο έχει δύο οριζόντια έμβολα, ένα μικρό εμβαδού A_1 και ένα μεγάλο εμβαδού A_2 $(A_2 > A_1)$. Ασκούμε στο μικρό έμβολο κατακόρυφη δύναμη προς τα κάτω μέτρου F_1, οπότε το υγρό ασκεί κατακόρυφη δύναμη μέτρου F_2 προς τα πάνω στο μεγάλο έμβολο.

α. Η μεταβολή της πίεσης ΔP_1 λόγω της δύναμης $\vec{F_1}$ είναι μικρότερη στο μικρό έμβολο, από τη μεταβολή της πίεσης ΔP_2 στο μεγάλο έμβολο.

β. Η μεταβολή της πίεσης ΔP_1 λόγω της δύναμης $\vec{F_1}$ είναι μεγαλύτερη στο μικρό έμβολο, από τη μεταβολή της πίεσης ΔP_2 στο μεγάλο έμβολο.

γ. Για τα μέτρα των δυνάμεων ισχύει $F_1 = F_2$.

δ. Για τα έργα των δυνάμεων για μικρές μετατοπίσεις ισχύει $W_{F_1} = W_{F_2}$.

Μονάδες 5

Α5. Να γράψετε στο τετράδιό σας αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος.

α. Εναλλασσόμενη τάση δίνεται από την εξίσωση $\upsilon = 5\eta\mu(\omega t)$ στο (S.I.). Οι τιμές που μπορεί να πάρει η ενεργός τιμή της τάσης είναι από -5 V έως +5 V.

β. Δύο ενωμένα σώματα (Σ1) και (Σ2) με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένα στο άκρο ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $\mathrm{K} = 100\ \mathrm{N/m}$. Ισχύει ότι $m_1 = 3m_2$. Η σταθερά επαναφοράς για το σώμα (Σ1) ισούται με $D_1 = 25\ \mathrm{N/m}$.

γ. Σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με εξίσωση πλάτους $\mathrm{A} = \mathrm{A}_o e^{-\Lambda t}$. Το χρονικό διάστημα που απαιτείται ώστε να υποδιπλασιαστεί η ενέργεια του σώματος είναι $\Delta t = \dfrac{\ln 2}{2\Lambda}$.

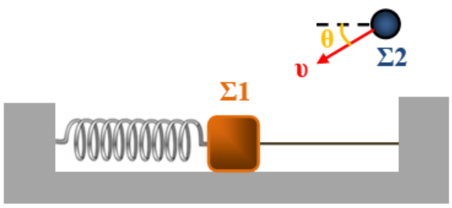
δ. Η εξίσωση της συνέχειας είναι συνέπεια της αρχής διατήρησης της ύλης.

ε. Η ροπή αδράνειας είναι μονόμετρο μέγεθος.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σώμα (Σ1) μάζας $m_1 = 2\ \mathrm{kg}$ είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 75\ \mathrm{N/m}$ που έχει το φυσικό του μήκος και ο άξονάς του είναι οριζόντιος, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Το σώμα (Σ1) είναι επίσης δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου λάστιχου, όπως φαίνεται στο σχήμα, το οποίο όταν είναι επιμηκυμένο κατά x ασκεί δύναμη μέτρου $F_\Lambda = 225x$ στο (S.I.). Το λάστιχο έχει το φυσικό του μήκος. Δεύτερο μικρό σώμα (Σ2) μάζας $m_2 = 1\ \mathrm{kg}$ κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 6\ \mathrm{m/s}$, η οποία σχηματίζει γωνία $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ rad προς τα κάτω με την οριζόντια διεύθυνση. Τα δύο σώματα συγκρούονται πλαστικά και το συσσωμάτωμα, χωρίς να αναπηδήσει, αρχίζει να κινείται στην οριζόντια διεύθυνση και εκτελεί περιοδική κίνηση. Δίνονται $\eta\mu\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. Σε μία πλήρη περιοδική κίνηση του συσσωματώματος, το διάστημα που διανύει ισούται με

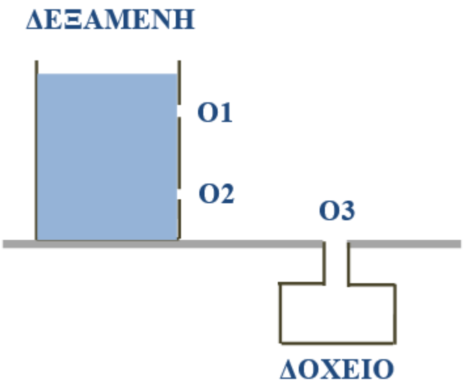


α. 0,3 m **β.** 0,4 m **γ.** 0,6 m

i. Ποια είναι η σωστή απάντηση; *Μονάδες 2*

ii. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. *Μονάδες 6*

B2. Η ανοιχτή δεξαμενή του σχήματος έχει πολύ μεγάλο εμβαδό ανοίγματος και περιέχει νερό, το οποίο θεωρούμε ως ιδανικό ρευστό, μέχρι ύψος $H = 25\ \text{m}$ επάνω από την οριζόντια βάση της. Η δεξαμενή είναι ακλόνητα στερεωμένη επάνω σε οριζόντιο έδαφος. Στο πλευρικό τοίχωμα της δεξαμενής και στην ίδια κατακόρυφο υπάρχουν δύο οπές O_1 και O_2 ίδιου εμβαδού $A_1 = A_2 = A = 10\ \text{cm}^2$, οι οποίες αρχικά είναι κλειστές και δεν εξέρχεται νερό. Η οπή O_1 βρίσκεται σε ύψος $h_1 = 20\ \text{m}$ από το έδαφος και η οπή O_2 σε ύψος h_2. Στο έδαφος, σε οριζόντια απόσταση x_B από το κατακόρυφο τοίχωμα της δεξαμενής, υπάρχει το άνοιγμα O_3 ενός αρχικά άδειου δοχείου όγκου $V_{ΔΟΧ} = 590\ \text{L}$ (L:λίτρα), το οποίο βρίσκεται κάτω από το έδαφος όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ ανοίγουμε ταυτόχρονα τα καπάκια των δύο οπών και το νερό αρχίζει να εξέρχεται ταυτόχρονα από τις δύο οπές της δεξαμενής. Το νερό και από τις δύο οπές πέφτει στο άνοιγμα O_3 και καταλήγει μέσα στο δοχείο. Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10\ \text{m/s}^2$.



B2.A. Το ύψος h_2 ισούται με

α. 5 m **β.** 10 m **γ.** 15 m

i. Ποια είναι η σωστή απάντηση; *Μονάδα 1*

ii. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. *Μονάδες 3*

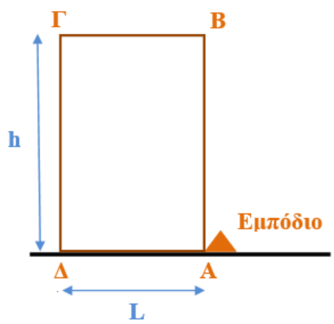
B2.B. Η χρονική στιγμή στην οποία το δοχείο γεμίζει με νερό ισούται με

α. 19 s **β.** 20 s **γ.** 21 s

i. Ποια είναι η σωστή απάντηση; *Μονάδα 1*

ii. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. *Μονάδες 3*

B3. Ομογενές κιβώτιο ΑΒΓΔ μάζας m έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου μήκους βάσης $L = 1,2\ \text{m}$ και ύψους $h = 1,6\ \text{m}$. Το κιβώτιο βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και κατά μήκος μιας ακμής του πλάτους στο έδαφος, που περνάει από την κορυφή Α υπάρχει εμπόδιο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το κιβώτιο μπορεί να περιστραφεί γύρω από το εμπόδιο, σε κατακόρυφο επίπεδο. Αν η ελάχιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που απαιτείται για να περιστραφεί είναι απειροελάχιστα μεγαλύτερη από $F = 120\ \text{N}$, το ελάχιστο έργο της ώστε το κιβώτιο να ανατραπεί πλήρως ισούται με



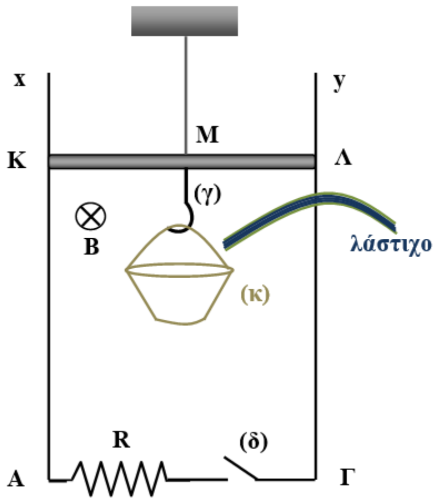
α. 80 J **β.** 95 J **γ.** 160 J

i. Ποια είναι η σωστή απάντηση; *Μονάδες 2*

ii. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. *Μονάδες 7*

ΘΕΜΑ Γ

Τα κατακόρυφα μεταλλικά σύρματα μεγάλου μήκους Αx και Γy του σχήματος έχουν αμελητέα ωμική αντίσταση και απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\ell = 1\ \text{m}$. Τα κάτω άκρα τους Α και Γ συνδέονται μεταξύ τους μέσω ωμικής αντίστασης $R = 150\ \text{m}\Omega$ και ενός διακόπτη (δ), ο οποίος είναι αρχικά ανοικτός. Οριζόντια, ομογενής και ισοπαχής μεταλλική ράβδος ΚΛ μάζας $m_\rho = 2\ \text{kg}$, μήκους $\ell = 1\ \text{m}$ και ωμικής αντίστασης $r = 50\ \text{m}\Omega$ ισορροπεί. Το άκρο Κ της ράβδου είναι πάντοτε σε επαφή με το σύρμα Αx, ενώ το άκρο Λ είναι πάντοτε σε επαφή με το σύρμα Γy. Η ράβδος κρέμεται από την οροφή μέσω αβαρούς και μη εκτατού νήματος, το οποίο είναι δεμένο στο μέσον Μ της ράβδου. Το όριο θραύσης του νήματος είναι $T_{\theta\rho} = 65\ \text{N}$. Στο μέσο Μ επίσης είναι στερεωμένος μικρός αβαρής πλαστικός γάντζος (γ) από τον οποίο κρέμεται πλαστικός κουβάς (κ) μάζας $m_\kappa = 0,5\ \text{kg}$.



Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ με ένα λάστιχο ποτίσματος αρχίζουμε να ρίχνουμε νερό μέσα στον κουβά με σταθερή παροχή $\Pi = 10^{-3}\ \text{m}^3/s$, χωρίς ο κουβάς να κινείται. Η όλη διάταξη βρίσκεται μέσα σε οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B = 1\ \text{T}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνονται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10\ \text{m/s}^2$ και η πυκνότητα του νερού $\rho_\nu = 10^3\ \text{kg/m}^3$.

Γ1. Να προσδιορίσετε την εξίσωση που συνδέει το μέτρο της τάσης Τ του νήματος με τη χρονική στιγμή t *(Μονάδες 4)* και στη συνέχεια να κάνετε τη γραφική τους παράσταση *(Μονάδες 2)* (στον άξονα $x'x$ να βάλετε το χρόνο και στον άξονα $y'y$ να βάλετε το μέτρο της τάσης του νήματος) από τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 που καθώς πέφτει νερό από το λάστιχο στον κουβά σπάει το νήμα.

Γ2. Τη χρονική στιγμή t_1 απομακρύνουμε ακαριαία το λάστιχο. Το σύστημα ράβδου-κουβά αρχίζει να πέφτει, με τη ράβδο να διατηρείται πάντα οριζόντια. Να υπολογίσετε την τάση από επαγωγή $E_{\varepsilon\pi}$ και να αιτιολογήσετε την πολικότητα στα άκρα της ράβδου, τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + 2$ (S.I.). *Μονάδες 6*

Γ3. Τη χρονική στιγμή t_2 κλείνουμε το διακόπτη (δ). Να αιτιολογήσετε ότι το σύστημα ράβδος-κουβάς θα αποκτήσει σταθερή οριακή ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{o\rho}$ αναλύοντας το είδος της κινησης που θα εκτελέσει *(Μονάδες 3)*, και να υπολογίσετε την οριακή ταχύτητα $\upsilon_{o\rho}$ *(Μονάδες 3)*.

Γ4. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας $\dfrac{\Delta K}{\Delta t}$ του συστήματος ράβδου-κουβά, τη χρονική στιγμή που η ταχύτητά του είχε μέτρο $\upsilon = \dfrac{15\upsilon_{o\rho}}{13}$.

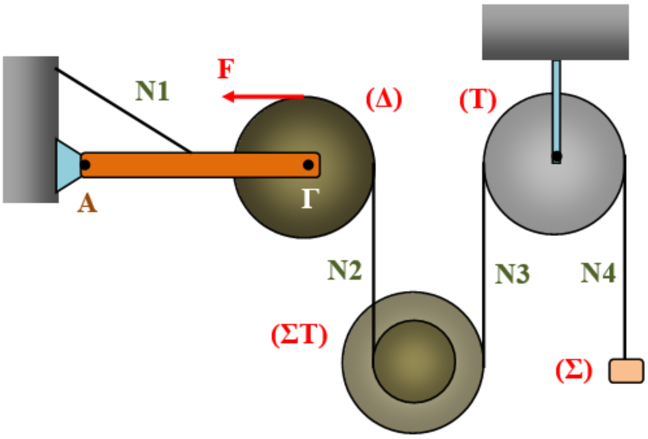
Μονάδες 7

Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα. Η ράβδος ΚΛ κινείται χωρίς τριβές στα κατακόρυφα σύρματα Αx και Γy. Θεωρούμε το νερό ακίνητο μέσα στον κουβά.

ΘΕΜΑ Δ

Το σύστημα του σχήματος βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο και αποτελείται από

- μία ομογενή ράβδο ΑΓ μάζας $\mathrm{M}=600\ \mathrm{g}$ και μήκους $\ell=1\ \mathrm{m}$, η οποία στο άκρο της Α συνδέεται σε κατακόρυφο τοίχο με άρθρωση
- αβαρές και μη εκτατό νήμα (Ν1) που συνδέει το μέσο της ράβδου με τον κατακόρυφο τοίχο
- έναν ομογενή δίσκο (Δ) μάζας $\mathrm{M}_{\Delta}=2\ \mathrm{kg}$ και ακτίνας $R_{\Delta}=20\ \mathrm{cm}$, ο οποίος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο αβαρή άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και από το άκρο Γ της ράβδου. Στην περιφέρεια του δίσκου (Δ) υπάρχει αυλάκι.



- αβαρές και μη εκτατό κατακόρυφο νήμα (Ν2) που είναι τυλιγμένο στο αυλάκι του (Δ1) και στο αυλάκι του εσωτερικού κυλίνδρου του στερεού (ΣΤ)
- το στερεό (ΣΤ) μάζας $\mathrm{M}_{\Sigma}=2\ \mathrm{kg}$ που αποτελείται από δύο κυλίνδρους, τον εσωτερικό ακτίνας $R_{\Sigma,1}=10\ \mathrm{cm}$ και τον εξωτερικό ακτίνας $R_{\Sigma,2}=20\ \mathrm{cm}$.
- αβαρές και μη εκτατό κατακόρυφο νήμα (Ν3) που είναι τυλιγμένο στον εξωτερικό κύλινδρο του στερεού (ΣΤ) και στο αυλάκι της τροχαλίας (Τ)
- τροχαλία (Τ) μάζας $\mathrm{M}_{\mathrm{T}}=2\ \mathrm{kg}$ και ακτίνας $R_{\mathrm{T}}=20\ \mathrm{cm}$, η οποία στην περιφέρειά της έχει αυλάκι
- αβαρές και μη εκτατό κατακόρυφο νήμα (Ν4) που είναι τυλιγμένο στο αυλάκι της τροχαλίας και είναι δεμένο σε μικρό σώμα (Σ) μάζας m

Δ1. Αρχικά όλο το σύστημα ισορροπεί, με τη βοήθεια οριζόντιας δύναμης μέτρου $F=80\ \mathrm{N}$, η οποία ασκείται στο ανώτερο σημείο της περιφέρειας του δίσκου (Δ), όπως φαίνεται στο σχήμα.Να αποδείξετε ότι ισχύει $m=4\ \mathrm{kg}$. *Μονάδες 5*

Δ2. Τη χρονική στιγμή $t_o=0$ μηδενίζεται ακαριαία η δύναμη $\vec{F}$, ενώ κόβουμε το νήμα (Ν3). Το στερεό (ΣΤ) αρχίζει να κατέρχεται με το νήμα (Ν2) να παραμένει πάντοτε κατακόρυφο, ενώ και το σώμα (Σ) αρχίζει να κατέρχεται. Τα νήματα δεν ολισθαίνουν στα αυλάκια του δίσκου, του στερεού και της τροχαλίας. Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης α_{cm} του κέντρου μάζας του στερεού, καθώς και το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του στερεού. *Μονάδες 5*

Δ3. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,7\ \text{s}$ κόβεται το νήμα (Ν2) χωρίς να επηρεαστούν οι ταχύτητες του δίσκου και του στερεού εκείνη τη στιγμή. Να υπολογίσετε το λόγο της μεταφορικής κινητικής ενέργειας $\text{K}_{\mu\varepsilon\tau}$ του στερεού προς τη στροφική κινητική ενέργεια $\text{K}_{\sigma\tau\rho}$ του στερεού τη χρονική στιγμή $t_2 = 1,7\ \text{s}$. *Μονάδες 5*

Δ4. Τη χρονική στιγμή t_3 (ισχύει $t_3 > t_2$) κόβεται το νήμα (Ν1), οπότε το σύστημα της ράβδου και του δίσκου περιστρέφονται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από την άρθρωση στο άκρο Α της ράβδου. Να υπολογίσετε το μέτρο της ολικής στροφορμής του συστήματος ράβδου-δίσκου όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση, τέτοια ώστε $\eta\mu\theta = \dfrac{112}{2300}$. *Μονάδες 5*

Δ5. Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ το κέντρο Κ του στερεού και το σώμα (Σ) βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογίσετε την κατακόρυφη απόστασή τους τη χρονική στιγμή $t_4 = 1\ \text{s}$. *Μονάδες 5*

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα. Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10\ \text{m/s}^2$, η ροπή αδράνειας του δίσκου (Δ) ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο του Γ $\text{I}_{cm,\Delta} = \dfrac{1}{2}\text{M}_\Delta R_\Delta^2$, η ροπή αδράνειας του στερεού (ΣΤ) ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο του $\text{I}_{\Sigma\text{T}} = \dfrac{1}{2}\text{M}_\Sigma R_{\Sigma,2}^2$, η ροπή αδράνειας της τροχαλίας (Τ) ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της Ο $\text{I}_{cm,\text{T}} = \dfrac{1}{2}\text{M}_\text{T} R_\text{T}^2$. Δίνεται ακόμη η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της $\text{I}_{cm,\rho} = \dfrac{1}{12}\text{M}\ell^2$.

Οι άξονες περιστροφής είναι κάθετοι στο κατακόρυφο επίπεδο του συστήματος.

ΝΑ ΕΙΣΤΕ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΟΙ

ΚΑΙ

ΝΑ ΓΡΑΨΕΤΕ ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΑ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΦΥΣΙΚΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΝΩΣΗ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

Κυριακή 15 Μαΐου 2022

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α (διότι δεν μεταβάλλεται η μαγνητική ροή).

Α2. γ

Α3. δ (διότι $K+U=U_{max} \Leftrightarrow 4U=U_{max} \Leftrightarrow 4\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}DA^2 \Leftrightarrow x=\pm\frac{A}{2}$ και

$$|P|=|\upsilon\cdot\Sigma F|=\omega\sqrt{A^2-x^2}D|x|=\omega\frac{A\sqrt{3}}{2}D\frac{A}{2}=\frac{1}{2}DA^2\frac{\sqrt{3}}{2}\omega=4U\frac{\sqrt{3}}{2}\omega=2\sqrt{3}U\omega$$

Α4. δ

Α5. α. Λ **β. Λ** (ισούται με $D_1=75$ N/m)

γ. Σ **δ Σ** **ε. Σ**

ΘΕΜΑ Β

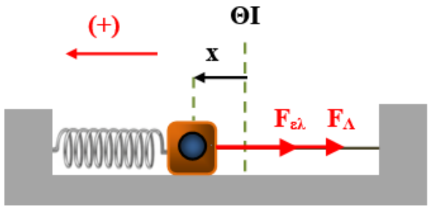
Β1. i. Σωστή απάντηση είναι η **γ.**

ii. Εφόσον $\Sigma F_{\varepsilon\xi,x}=0$ εφαρμόζουμε για την κρούση ΑΔΟ στον οριζόντιο άξονα:

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi,x}=\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda,x} \Leftrightarrow p_{\alpha\rho\chi,x}=p_{\tau\varepsilon\lambda,x} \Leftrightarrow m_2\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=(m_1+m_2)\cdot\upsilon_{max} \Leftrightarrow 1\cdot 6\cdot\frac{1}{2}=3\cdot\upsilon_{max} \Leftrightarrow$$

$$\upsilon_{max}=1\text{ m/s}$$

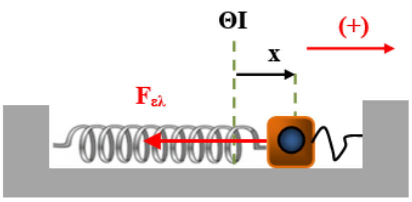
Μέχρι το συσσωμάτωμα να ξαναπεράσει από τη θέση ισορροπίας, δέχεται στον οριζόντιο άξονα δύο δυνάμεις: μία από το ελατήριο και μία από το λάστιχο. Σε τυχαία θέση ισχύει: $\Sigma F_x=-kx-225x=-300x$ στο (S.I.). Αφού ΣF_x είναι ανάλογο του x το συσσωμάτωμα εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς



$D_1=300$ N/m και $\omega_1=\sqrt{\frac{D_1}{m_1+m_2}}=\sqrt{\frac{300}{3}}=10$ r/s και το πλάτος είναι:

$$A_1=\frac{\upsilon_{max}}{\omega_1}=\frac{1}{10}=0{,}1\text{ m}.$$

Στο επόμενο μισό της περιοδικής κίνησης, το συσσωμάτωμα δέχεται δύναμη μόνο από το ελατήριο, αφού το λάστιχο δεν είναι τεντωμένο. Σε τυχαία θέση ισχύει: $\Sigma F_x=-kx=-75x$ στο (S.I.). Αφού ΣF_x είναι ανάλογο του x το



συσσωμάτωμα εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς $D_2 = 75\ \mathrm{N/m}$ και $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{D_2}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\dfrac{75}{3}} = 5\ \mathrm{r/s}$ και το πλάτος είναι: $\mathrm{A}_2 = \dfrac{\upsilon_{\max}}{\omega_2} = \dfrac{1}{5} = 0,2\ \mathrm{m}$.

Άρα σε μία πλήρη περιοδική κίνηση το συσσωμάτωμα διανύει απόσταση:
$2\mathrm{A}_1 + 2\mathrm{A}_2 = 2\cdot 0,1 + 2\cdot 0,2 = 0,6\ \mathrm{m}$

B2.A. i. Σωστή απάντηση είναι η **α.**

ii. Υπολογίζουμε το βεληνεκές από την οπή O_1 (το θεώρημα Torricelli καλό είναι να το αποδείξουμε):

$$x_\mathrm{B} = \upsilon_1 t_1 = \sqrt{2g(\mathrm{H}-h_1)}\cdot\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 5}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 20}{10}} = 20\ \mathrm{m}$$

Το βεληνεκές είναι ίδιο. Άρα για το νερό που εξέρχεται από την οπή O_2 ισχύει:

$$x_\mathrm{B} = \upsilon_2 t_2 \Leftrightarrow 20 = \sqrt{2g(\mathrm{H}-h_2)}\cdot\sqrt{\frac{2h_2}{g}} \Leftrightarrow 400 = 20(25-h_2)\cdot\frac{2h_2}{10} \Leftrightarrow$$

$$400 = 4(25-h_2)\cdot h_2 \Leftrightarrow 100 = (25-h_2)\cdot h_2 \Leftrightarrow h_2^2 - 25h_2 + 100 = 0$$

Από τη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης προκύπτει $h_2 = 20\ \mathrm{m}$ (απορρίπτεται) ή $h_2 = 5\ \mathrm{m}$ (δεκτή).

B2.B. i. Σωστή απάντηση είναι η **γ.**

ii. Η ταχύτητα του νερού που εξέρχεται από την οπή O_1 ισούται με:

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g(\mathrm{H}-h_1)} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 5} = 10\ \mathrm{m/s}$$

Η ταχύτητα του νερού που εξέρχεται από την οπή O_2 ισούται με:

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g(\mathrm{H}-h_2)} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 20} = 20\ \mathrm{m/s}$$

Η παροχή νερού από τις δύο οπές O_1 και O_2 αντίστοιχα ισούται με:

$$\Pi_1 = \mathrm{A}\cdot\upsilon_1 = 10^{-3}\cdot 10 = 10^{-2}\ \frac{m^3}{s} \quad \text{και} \quad \Pi_2 = \mathrm{A}\cdot\upsilon_2 = 10^{-3}\cdot 20 = 2\cdot 10^{-2}\ \frac{m^3}{s}$$

Οι χρονικές στιγμές που το νερό από την οπή O_1 και την οπή O_2 εισέρχονται στο άνοιγμα O_3 του δοχείου αντίστοιχα, είναι ίσες με:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 20}{10}} = 2\ \mathrm{s} \quad \text{και} \quad t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 5}{10}} = 1\ \mathrm{s}$$

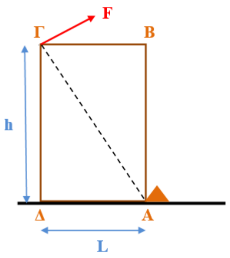
Αν Δt είναι το απαιτούμενο χρονικό διάστημα, μετά τη χρονική στιγμή $t_2 = 1\ \mathrm{s}$ ώστε να γεμίσει η δεξαμενή, θα ισχύει:

$$\Pi_1(\Delta t - 1) + \Pi_2\Delta t = 0,59 \Leftrightarrow 10^{-2}(\Delta t - 1) + 2\cdot 10^{-2}\Delta t = 59\cdot 10^{-2} \Leftrightarrow \Delta t - 1 + 2\Delta t = 59 \Leftrightarrow$$
$$\Delta t = 20\ \mathrm{s}$$

Άρα η χρονική στιγμή που θα γεμίσει το δοχείο είναι: $t = 1 + 20 = 21\ \mathrm{s}$

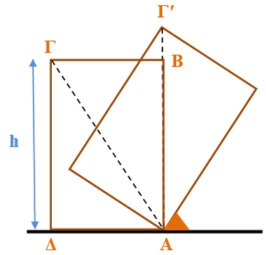
B3. i. Σωστή απάντηση είναι η **α.**

ii. Η ελάχιστη τιμή της δύναμης είναι όταν η δύναμη είναι κάθετη στη μέγιστη απόσταση, δηλαδή στην ΑΓ. Με Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ βρίσκουμε $(\text{ΑΓ}) = 2\ \text{m}$. Για να περιστραφεί το κιβώτιο πρέπει η ροπή της δύναμης $\vec{F}$ να γίνει μεγαλύτερη της ροπής του βάρους. Άρα για την τιμή $F = 120\ \text{N}$ το κιβώτιο ισορροπεί οριακά. Επομένως:



$$F \cdot (\text{ΑΓ}) = W \cdot \frac{L}{2} \Leftrightarrow 120 \cdot 2 = W \cdot 0,6 \Leftrightarrow W = 400\ \text{N}.$$

Για να ανατραπεί πλήρως το κιβώτιο με το ελάχιστο έργο, πρέπει η διαγώνιος ΑΓ να γίνει κατακόρυφη χωρίς να έχει γωνιακή ταχύτητα. Τότε, λόγω αδράνειας, θα ανατραπεί πλήρως. Άρα το κέντρο βάρους του κιβωτίου πρέπει να ανέβει κατά απόσταση $\Delta h = \frac{(\text{ΑΓ})}{2} - \frac{h}{2} = 1 - 0,8 = 0,2\ \text{m}$. Το ελάχιστο έργο ισούται με τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας (το κιβώτιο φτάνει στην ανώτερη θέση με μηδενική κινητική ενέργεια):



$$W_F = W \cdot \Delta h = 400 \cdot 0,2 = 80\ \text{J}$$

ΘΕΜΑ Γ

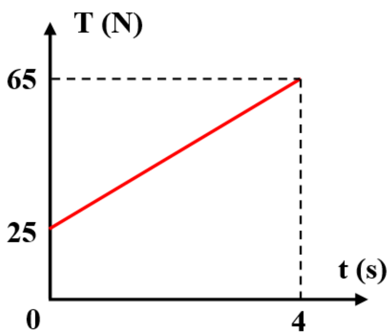
Γ1. Σε τυχαία χρονική στιγμή t θα υπολογίσουμε την ποσότητα του νερού μέσα στον κουβά: $\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta V = 10^{-3}\Delta t \Leftrightarrow \frac{m_\nu}{\rho_\nu} = 10^{-3}(t-0) \Leftrightarrow m_\nu = t$ (S.I.).

Άρα για το σύστημα ράβδος-κουβάς που ισορροπεί ισχύει:

$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow \text{T} = m_\rho g + m_\kappa g + m_\nu g \Leftrightarrow \text{T} = 20 + 5 + 10t \Leftrightarrow \text{T} = 10t + 25$ (S.I.) (εξίσωση ευθείας).

Το νήμα σπάει τη χρονική στιγμή:

$$65 = 10t_1 + 25 \Leftrightarrow 10t_1 = 40 \Leftrightarrow t_1 = 4\ \text{s}.$$



Γ2. Εφόσον ο διακόπτης είναι ανοικτός, δεν διαρρέει ηλεκτρικό ρεύμα το κύκλωμα και επομένως δεν ασκείται στη ράβδο δύναμη Laplace. Στο σύστημα ασκούνται μόνο τα βάρη και εκτελεί ελεύθερη πτώση. Άρα:

$\upsilon = g(t_2 - t_1) = 10 \cdot 2 = 20\ \text{m/s}$ και $\text{E}_{\varepsilon\pi} = \text{B}\upsilon\ell = 1 \cdot 20 \cdot 1 = 20\ \text{V}$

Η πολικότητα είναι θετική στο Λ και αρνητική στο Κ, διότι εφόσον μειώνεται το εμβαδόν του πλαισίου ΑΓΛΚ, μειώνεται και η μαγνητική ροή Φ που διέρχεται από αυτό. Αν περνούσε ηλεκτρικό ρεύμα, σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, θα είχε τέτοια φορά ώστε να αντιτίθεται στη μείωση της μαγνητικής ροής Φ. Επομένως θα ενίσχυε το υπάρχον μαγνητικό πεδίο, η διεύθυνση του μαγνητικού του πεδίου θα ήταν κάθετη στο επίπεδο του σχήματος με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα. Με τον κανόνα του δεξιού χεριού υπολογίζουμε την πολικότητα.

Γ3. Τη χρονική στιγμή t_2 που κλείνουμε το διακόπτη (δ), αρχίζει να διαρρέει ηλεκτρικό ρεύμα το κύκλωμα με φορά από το Κ στο Λ. Με τον κανόνα τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι η φορά της δύναμης Laplace είναι κατακόρυφη προς τα επάνω. Τη χρονική στιγμή t_2 το ηλεκτρικό ρεύμα έχει ένταση

$\mathrm{I} = \dfrac{\mathrm{E}_{\varepsilon\pi}}{R_{ol}} = \dfrac{20}{0,2} = 100\ \mathrm{A}$ και η δύναμη Laplace έχει μέτρο $F_L = \mathrm{B I}\ell = 100\ \mathrm{N}$ που είναι μεγαλύτερο από το μέτρο του βάρους του συστήματος, που είναι:

$W = (m_\rho + m_\kappa + m_\nu) g = 65\ \mathrm{N}$

Άρα το σύστημα θα αρχίσει να επιβραδύνεται με μειούμενη επιτάχυνση

$$\alpha = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{\mathrm{B I}\ell - 65}{6,5} = \frac{\mathrm{B}\dfrac{\mathrm{B}\upsilon\ell}{R_{o\lambda}}\ell - 65}{6,5}$$

εώς ότου αποκτήσει σταθερή (οριακή) ταχύτητα:

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F_L = W \Leftrightarrow \mathrm{B I}\ell = 65 \Leftrightarrow \mathrm{B}\frac{\mathrm{B}\upsilon_{o\rho}\ell}{R_{o\lambda}}\ell = 65 \Leftrightarrow \upsilon_{o\rho} = 0,2\cdot 65 \Leftrightarrow \upsilon_{o\rho} = 13\ \mathrm{m/s}$$

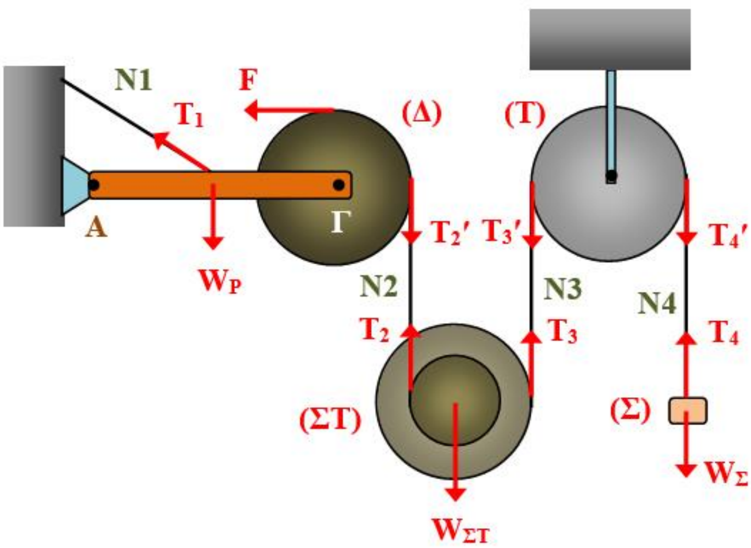
Γ4. $\upsilon = \dfrac{15\upsilon_{o\rho}}{13} = \dfrac{15\cdot 13}{13} = 15\ \mathrm{m/s}$ και $\mathrm{E}_{\varepsilon\pi} = \mathrm{B}\upsilon\ell = 15\ \mathrm{V}$ και $\mathrm{I} = \dfrac{\mathrm{E}_{\varepsilon\pi}}{R_{o\lambda}} = \dfrac{15}{0,2} = 75\ \mathrm{A}$.

Η δύναμη Laplace ισούται με: $F_L = \mathrm{B I}\ell = 75\ \mathrm{N}$. Άρα:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Sigma F\cdot\Delta y}{\Delta t} = \Sigma F\cdot\upsilon = (-F_L + W)\cdot\upsilon = (-F_L + 65)\cdot 15 = (-75+65)\cdot 15 = -150\ \mathrm{J/s}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αρχικά όλο το σύστημα ισορροπεί, άρα



για το δίσκο (Δ): $\Sigma\tau_{(\Gamma)} = 0 \Leftrightarrow F R_\Delta - \mathrm{T}_2' R_\Delta = 0 \Leftrightarrow \mathrm{T}_2' = F = 80\ \mathrm{N}$

νήμα (Ν2) αβαρές και μη ελαστικό: $\mathrm{T}_2' = \mathrm{T}_2 = 80\ \mathrm{N}$

για το στερεό (ΣΤ): $\Sigma\tau_{(cm)} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{T}_2 R_{\Sigma,1} - \mathrm{T}_3 R_{\Sigma,2} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{T}_3 = 40\ \mathrm{N}$

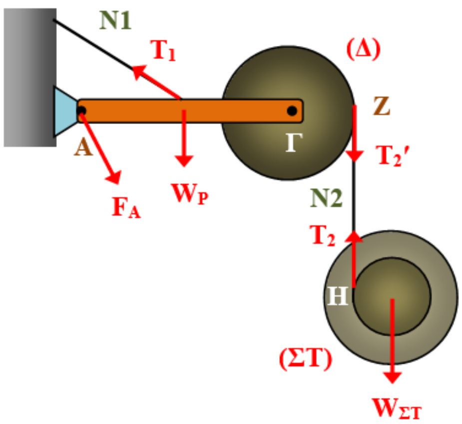
νήμα (Ν3) αβαρές και μη ελαστικό: $\mathrm{T}_3' = \mathrm{T}_3 = 40\ \mathrm{N}$

για την τροχαλία (Τ): $\Sigma\tau_{(cm)} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{T}_3' R_{\mathrm{T}} - \mathrm{T}_4' R_{\mathrm{T}} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{T}_3' = \mathrm{T}_4' = 40\ \mathrm{N}$

νήμα (Ν4) αβαρές και μη ελαστικό: $\mathrm{T}_4' = \mathrm{T}_4 = 40\ \mathrm{N}$

για το σώμα (Σ): $\Sigma F_\Sigma = 0 \Leftrightarrow \mathrm{T}_4 - W_\Sigma = 0 \Leftrightarrow \mathrm{T}_4 = W_\Sigma \Leftrightarrow 40 = m10 \Leftrightarrow m = 4\ \mathrm{kg}$.

Δ2. Τώρα το σύστημα δεν ισορροπεί, άρα αλλάζουν οι τιμές των τάσεων των νημάτων. Έστω $\overrightarrow{\alpha_{\gamma,\Delta}}$ η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου (Δ), $\overrightarrow{\alpha_{\gamma,\Sigma\mathrm{T}}}$ η γωνιακή επιτάχυνση του στερεού (ΣΤ) και $\overrightarrow{\alpha_{cm}}$ η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του στερεού. Έστω δύο σημεία Ζ, Η του νήματος (Ν2). Το σημείο Ζ ακουμπάει στο δίσκο (Δ) και το Η ακουμπάει στο στερεό (ΣΤ). Ισχύει στη διεύθυνση του νήματος (Ν2):



$\alpha_{\mathrm{Z}} = \alpha_{\mathrm{H}} \Leftrightarrow \alpha_{\gamma,\Delta} R_\Delta = \alpha_{cm} - \alpha_{\gamma,\Sigma\mathrm{T}} R_{\Sigma,1} \Leftrightarrow$

$\alpha_{\gamma,\Delta} 0,2 = \alpha_{cm} - \alpha_{\gamma,\Sigma\mathrm{T}} 0,1 \Leftrightarrow$

$2\alpha_{\gamma,\Delta} = 10\alpha_{cm} - \alpha_{\gamma,\Sigma\mathrm{T}} \Leftrightarrow \alpha_{\gamma,\Sigma\mathrm{T}} = 10\alpha_{cm} - 2\alpha_{\gamma,\Delta}$

Για το στερεό:

$$\Sigma\tau_{(cm)} = \mathrm{I}_{\Sigma\mathrm{T}}\alpha_{\gamma,\Sigma\mathrm{T}} \Leftrightarrow \mathrm{T}_2 R_{\Sigma,1} = \frac{1}{2}\mathrm{M}_\Sigma R_{\Sigma,2}^2 \alpha_{\gamma,\Sigma\mathrm{T}} \Leftrightarrow \mathrm{T}_2 \cdot 0,1 = 0,04\alpha_{\gamma,\Sigma\mathrm{T}} \Leftrightarrow \mathrm{T}_2 = 0,4\alpha_{\gamma,\Sigma\mathrm{T}}$$

$$\Sigma F = \mathrm{M}_\Sigma \alpha_{cm} \Leftrightarrow W_{\Sigma\mathrm{T}} - \mathrm{T}_2 = 2\alpha_{cm} \Leftrightarrow \mathrm{T}_2 = 20 - 2\alpha_{cm}$$

Για το δίσκο (Δ):

$$\Sigma\tau_{(\Gamma)} = \mathrm{I}_\Delta \alpha_{\gamma,\Delta} \Leftrightarrow \mathrm{T}_2 R_\Delta = \frac{1}{2}\mathrm{M}_\Delta R_\Delta^2 \alpha_{\gamma,\Delta} \Leftrightarrow \mathrm{T}_2 \cdot 0,2 = 0,04 \cdot \alpha_{\gamma,\Delta} \Leftrightarrow \mathrm{T}_2 = 0,2 \cdot \alpha_{\gamma,\Delta}$$

Από τη λύση του παραπάνω συστήματος των τεσσάρων εξισώσεων προκύπτουν για το δίσκο $\alpha_{\gamma,\Delta} = \frac{200}{7}\ \mathrm{r/s^2}$ και για το στερεό $\alpha_{cm} = \frac{50}{7}\ \mathrm{m/s^2}$ και $\alpha_{\gamma,\Sigma\mathrm{T}} = \frac{100}{7}\ \mathrm{r/s^2}$.

Δ3. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,7\ \mathrm{s}$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας του στερεού είναι

$$\upsilon_{\Sigma\mathrm{T},1} = \alpha_{cm} t_1 = \frac{50}{7} 0,7 = 5\ \mathrm{m/s}$$

και η γωνιακή του ταχύτητα είναι $\omega_{\Sigma\mathrm{T},1} = \alpha_{\gamma,\Sigma\mathrm{T}} t_1 = \frac{100}{7} 0,7 = 10\ \mathrm{r/s}$.

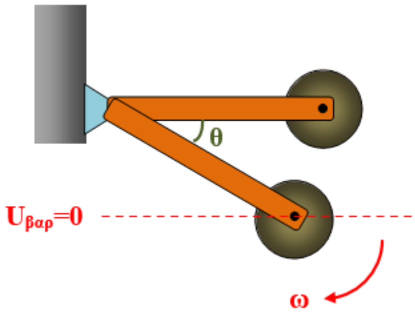
Μετά τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,7\ \mathrm{s}$ το στερεό κάνει στροφική ομαλή κίνηση (αφού το βάρος δεν έχει ροπή ως προς το κέντρο μάζας) και κατακορυφη βολή προς τα κάτω. Επομένως τη χρονική στιγμή $t_2 = 1,7\ \mathrm{s}$ η γωνιακή του ταχύτητα θα είναι $\omega_{\Sigma\mathrm{T},2} = \omega_{\Sigma\mathrm{T},1} = 10\ \mathrm{r/s}$ και η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα είναι

$$\upsilon_{\Sigma\mathrm{T},2} = \upsilon_{\Sigma\mathrm{T},1} + g\Delta t = 5 + 10 \cdot 1 = 15\ \mathrm{m/s}$$

Άρα ο ζητούμενος λόγος θα ισούται με:

$$\frac{K_{μετ}}{K_{στρ}}=\frac{\frac{1}{2}M_Σ υ_{ΣΤ,2}{}^2}{\frac{1}{2}I_{ΣΤ}ω_{ΣΤ,2}{}^2}=\frac{2\cdot 15^2}{0,04\cdot 10^2}=\frac{225}{2}=112,5.$$

Δ4. Τη χρονική στιγμή t_3 ο δίσκος έχει ίδια γωνιακή ταχύτητα με αυτήν που είχε τη χρονική στιγμή t_1 (διότι μετά την t_1 η συνιστάμενη ροπή των δυνάμεων ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι μηδέν): $ω_{Δ,3}=ω_{Δ,1}=α_{γ,Δ}t_1=\frac{200}{7}0,7=20\ \text{r/s}$. Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου δεν αλλάζει κατά τη στροφική κίνηση του συστήματος, για τον ίδιο λόγο. Θα υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδου-δίσκου εφαρμόζοντας ΑΔΜΕ:



$$E_{μηχ,αρχ}=E_{μηχ,τελ}\Leftrightarrow K_Δ+U_{αρχ}=K_Δ+K_{ΣΥΣ}+U_{τελ}\Leftrightarrow$$

$$Mg\ell ημθ+M_Δ g\ell ημθ=\frac{1}{2}I_{ΣΥΣ}ω^2+Mg\frac{\ell ημθ}{2}$$

όπου $I_{ΣΥΣ}=(\frac{M\ell^2}{12}+\frac{M\ell^2}{4})+(\frac{1}{2}M_Δ R_Δ^2+M_Δ\ell^2)=0,2+2,04=2,24\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

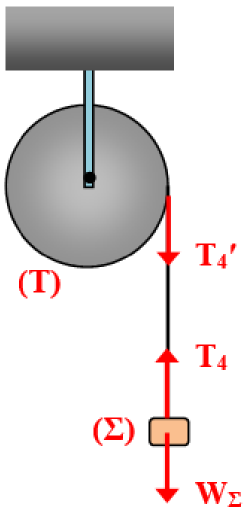
Από την ΑΔΜΕ προκύπτει $ω=1\ \text{r/s}$.

Κατά την κίνηση του συστήματος ράβδου-δίσκου υπάρχουν δύο στροφορμές. Μία από την κίνηση όλου του συστήματος γύρω από το άκρο Α της ράβδου και μία από την ιδιοπεριστροφή του δίσκου. Από τον κανόνα δεξιού χεριού προκύπτει ότι τα διανύσματα των δύο στροφορμών είναι ομόρροπα (σε οριζόντια διεύθυνση με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα). Επομένως τα προσθέτουμε αριθμητικά για να βρούμε το ολικό μέτρο της στροφορμής:

$$L_{ολ}=I_{ΣΥΣ}ω+\frac{1}{2}M_Δ R_Δ^2 ω_{Δ,1}=2,24\cdot 1+0,04\cdot 20=2,24+0,8=3,04\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/s$$

Δ5. Συμβολίζουμε με $α$ την επιτάχυνση του σώματος (Σ). Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό, άρα: $T_4'=T_4$.

Για την τροχαλία (Τ) ισχύει:



$$Στ_{(cm)}=I_{cm,T}α_{γ,T}\Leftrightarrow T_4'R_T=\frac{1}{2}M_T R_T^2 α_{γ,T}\Leftrightarrow T_4=α$$

διότι $α=α_{επιτροχια}=α_{γ,T}R_T$.

Για το σώμα (Σ) ισχύει:

$ΣF=mα\Leftrightarrow 40-T_4=4α\Leftrightarrow T_4=40-4α$

Επομένως $α=40-4α\Leftrightarrow α=8\ \text{m/s}^2$.

Άρα σε χρονικό διάστημα 1 s το σώμα θα έχει διανύσει κατακόρυφη απόσταση:

$$y_Σ=\frac{1}{2}αt^2=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 1^2=4\ \text{m}$$

Το στερεό (ΣΤ) έως τη χρονική στιγμή $t_1=0,7$ s έχει διανύσει κατακόρυφη απόσταση:

$$y_{\Sigma\mathrm{T},1} = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t_1^2 = \frac{1}{2}\frac{50}{7}\frac{7^2}{10^2} = \frac{7}{4} = 1,75 \text{ m}$$

και στα υπόλοιπα 0,3 s διανύει κατακόρυφη απόσταση:

$$y_{\Sigma\mathrm{T},2} = 5\cdot 0,3 + \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 0,3^2 = 1,5 + 0,45 = 1,95 \text{ m}$$

Άρα συνολικά το στερεό έχει διανύσει κατακόρυφη απόσταση:

$$y_{\Sigma\mathrm{T}} = y_{\Sigma\mathrm{T},1} + y_{\Sigma\mathrm{T},2} = 1,75 + 1,95 = 3,7 \text{ m}$$

Συνεπώς η κατακόρυφη απόστασή τους θα ισούται με:

$$\Delta y = y_{\Sigma} - y_{\Sigma\mathrm{T}} = 4 - 3,7 = 0,3 \text{ m}.$$