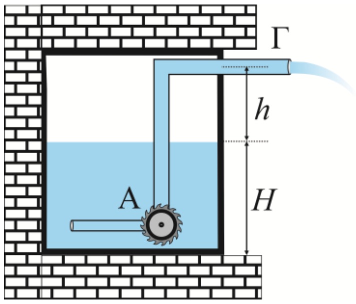
ΙΣΧΥΣ ΑΝΤΛΙΑΣ



Σε ένα υπόγειο, του οποίου η βάση είναι τετράγωνο, το νερό έχει ανέβει σε ύψος $H = 1{,}6\ \mathrm{m}$ από το δάπεδο. Ο συνολικός όγκος του νερού στο υπόγειο είναι $V = 9{,}6\ \mathrm{m}^3$. Για την έξοδο του νερού χρησιμοποιούμε μία αντλία η οποία βγάζει το νερό σε ύψος $h = H/4$ από την αρχική του στάθμη με ταχύτητα εκροής $4\ \mathrm{m/s}$. Η διατομή του σωλήνα είναι $A = 100\ \mathrm{cm}^2$. Βρείτε:

α. Τη δύναμη που δέχεται το δάπεδο του υπογείου από το νερό πριν αρχίσει η άντληση του.

β. Το χρόνο που χρειάζεται για το άδειασμα του νερού από το υπόγειο.

γ. Τη συνολική ενέργεια που δαπανά η αντλία για την άντληση του νερού.

δ. Την ισχύ P της αντλίας σαν συνάρτηση του χρόνου και κάντε το διάγραμμα $P = f(t)$.

Τη χρονική στιγμή που αντλία έχει αντλήσει τη μισή ποσότητα νερού, έχει δαπανήσει ενέργεια W_1, ενώ για το υπόλοιπο μισό δαπανά ενέργεια W_2.

ε. Βρείτε τα W_1 και W_2.

Δίνονται η πυκνότητα του νερού $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $[g = 10\ \mathrm{m/s^2}]$.

ΛΥΣΗ

α. Η πίεση στο δάπεδο του υπογείου είναι :

$$p = p_{atm} + \rho g h \Rightarrow p = 10^5 + 10^4 \cdot 1{,}6 = 10^5(1 + 0{,}16) = 11{,}6 \cdot 10^5 \mathrm{Pa}$$

Το εμβαδόν A' της βάσης του δοχείου μπορούμε να το βρούμε αφού ξέρουμε τον όγκο του νερού.

$$V = A'h \Rightarrow A' = \frac{V}{h} = \frac{9{,}6}{1{,}6} \Rightarrow A' = 6\ \mathrm{m}^2$$

Η δύναμη που δέχεται η βάση είναι:

$$F = pA' = 11{,}6 \cdot 10^5 \cdot 6 = 69{,}6 \cdot 10^5 \mathrm{N}$$

β. Η παροχή είναι:

$$\Pi = Av = 4 \cdot 10^{-2} \mathrm{m^3/s}$$

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta V}{\Pi} \Rightarrow t = \frac{9{,}6}{4 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow t = \frac{960}{4} = 240\ \mathrm{s} = 4\ \mathrm{min}$$

γ. Η συνολική μάζα M του νερού είναι:

$$M = \rho V = 1000 \cdot 9{,}6 = 9600\ \mathrm{kg}$$

Η ενέργεια που δαπανά η αντλία ισούται με την αύξηση της μηχανικής ενέργειας του νερού.

$$E_{\pi\rho} = \Delta K + \Delta U$$

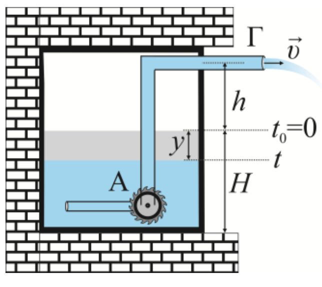
$$\Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 9600 \cdot 16 = 76.800\ \mathrm{J}$$

Για τον υπολογισμό της ΔU μπορούμε να θεωρήσουμε αρχικά όλη τη μάζα του νερού συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας και τελικά, λόγω της αντλίας, όλη η μάζα βρίσκεται πιο ψηλά κατά $H/2 + h$.

$$\Delta U = Mg\left(\frac{H}{2} + h\right) = 96000 \cdot (0{,}8 + 0{,}4) = 115.200\ \mathrm{J}$$

$$E_{\pi\rho} = \Delta K + \Delta U = 76.800 + 96.000 = 192.000\ \mathrm{J}$$

δ. Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την ισχύ της αντλίας συναρτήσει του χρόνου.



Στο σχήμα βλέπουμε τη στάθμη του νερού την τυχαία χρονική στιγμή που έχει κατέβει κατά y.

Θεωρούμε στοιχειώδη ποσότητα ρευστού μάζας dm η οποία βρίσκεται αρχικά στην επιφάνεια του νερού σε πίεση $p_{\alpha\rho\chi} = p_{atm}$.

Η μάζα dm τελικά θα βρεθεί σε ύψος $y + h$ με ταχύτητα v σε περιοχή πίεσης $p_{\tau\varepsilon\lambda} = p_{atm}$.

Αν η διαφορά πίεσης ήταν αρκετή ($p_{\alpha\rho\chi} = p_{atm} + \rho g h$) τότε δε θα χρειαζόταν η αντλία.

Επειδή το υπόγειο έχει άνοιγμα, ισχύει : $p_{αρχ} = p_{atm}$

Εφαρμόζουμε ΑΔΕ. Η προσφερόμενη ενέργεια από τη διαφορά πίεσης αλλά και από την αντλία γίνεται κινητική και δυναμική ενέργεια της μάζας dm.

$$E_{προσφ} = ΔK + ΔU \Rightarrow W_{αντ} + W_{Δp} = K + U \Rightarrow$$

$$dW_{αντ} + dW_{Δp} = dK + dU \Rightarrow \frac{dW_{αντ}}{dt} + \frac{dW_{Δp}}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt}$$

$$\frac{dW_{αντ}}{dt} + \frac{(p_{αρχ} - p_{τελ})dV}{dt} = \frac{\frac{1}{2}dmv^2}{dt} + \frac{dmg(h+y)}{dt} \xrightarrow{αν\, p_{αρχ}=p_{τελ}}$$

$$P = \frac{1}{2}\rho\frac{dV}{dt}\upsilon^2 + \rho\frac{dV}{dt}g(h+y) \Rightarrow$$

$$\boxed{P_{αντ} = Π\left[\frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g(h+y)\right] \quad (1)}$$

Η παροχή είναι:

$$Π = A\upsilon = 100 \cdot 10^{-4} \cdot 4 = 40 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3/s} = 40\ \mathrm{L/s} \quad (2)$$

Θα εκφράσουμε το y συναρτήσει του χρόνου. Το εμβαδόν της βάσης του δοχείου είναι $A' = 6\ \mathrm{m^2}$.
Επειδή η παροχή είναι σταθερή θα ισχύει:

$$V = V_0 - Πt \Rightarrow A'(H - y) = A'H - Πt \Rightarrow -A'y = -Πt \Rightarrow$$

$$y = \frac{Π}{A'}t = \frac{40 \cdot 10^{-3}}{6}t \Rightarrow y = \frac{20}{3}10^{-3}\,t \quad (3)$$

Από τις (1) και (3) έχουμε:

$$P = 40 \cdot 10^{-3}\left[\frac{1}{2}10^3 \cdot 16 + 10^3 \cdot 10\left(0{,}4 + \frac{20}{3}10^{-3}\,t\right)\right]$$

$$P = 40 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 16 + 10\left(0{,}4 + \frac{20}{3}10^{-3}\,t\right)\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{P = 480 + \frac{8}{3}t\ \mathrm{(SI)}\ \ (4),\ \ 0 \le t \le 240\ \mathrm{s}}$$

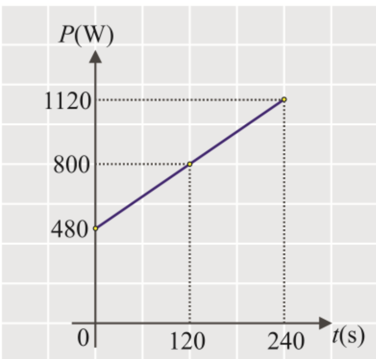
Το υπόγειο αδειάζει σε χρόνο:

$$t = \frac{V}{Π} = 240\ \mathrm{s}$$

ή, όταν:

$$y = H \Rightarrow 1{,}6 = \frac{20}{3}10^{-3}\,t \Rightarrow t = \frac{3 \cdot 1{,}6}{20 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow t = 240\ \mathrm{s}$$

Η συνάρτηση $P = f(t)$ είναι πρώτου βαθμού και η γραφική της παράσταση είναι ευθεία.



Το συνολικά παραγόμενο έργο από την αντλία το υπολογίζουμε με εμβαδομέτρηση:

$$W_{αντ} = \frac{(1120 + 480) \cdot 240}{2} = 192.000\ \mathrm{J}$$

Από 0 έως 120 s η αντλία έχει αντλήσει τον μισό όγκο νερού από το υπόγειο και υπολογίζουμε το παραγόμενο έργο από το διάγραμμα P-t με εμβαδομέτρηση:

$$W_1 = \frac{(480 + 800) \cdot 120}{2} = 76.800\ \mathrm{J}$$

Το έργο της αντλίας από 120 s έως 240 s, που αντλεί το άλλο μισό νερό, είναι:

$$W_2 = \frac{(1120 + 800) \cdot 120}{2} = 115.200\ \mathrm{J}$$