ΦΥΣΙΚΗ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΡΟΥΣΕΙΣ - ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1α. (α)   Α1β. (γ)

Α2α. (β)   Α2β. (α)

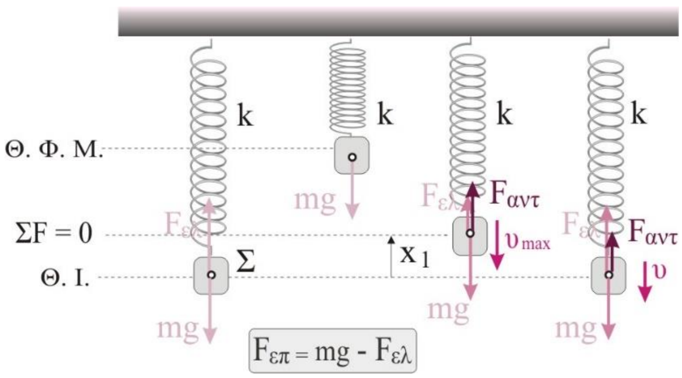
Α3α. (β)   Α3β. (γ)

Α4α. (δ)   Α4β. (δ)

Α5. α. Λ   β. Σ   γ. Σ   δ. Λ   ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή επιλογή είναι η (α).



Κατά την κάθοδο του σώματος από τη θέση φυσικού μήκους (Θ.Φ.Μ.) έως την αρχική θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) ασκούνται οι εξής δυνάμεις:
Το βάρος, η δύναμη του ελατηρίου και η δύναμη απόσβεσης, $F_{αντ.}$. Η συνισταμένη του βάρους και της δύναμης του ελατηρίου παίζουν τον ρόλο της δύναμης επαναφοράς, $F_{επ.}$.
Όταν το σώμα διέρχεται από την αρχική θέση ισορροπίας του η $F_{επ.}$ είναι ίση με μηδέν, οπότε η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι η $F_{αντ.}$ που έχει φορά αντίθετη της ταχύτητας.
Άρα, όταν το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας του εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση και το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται με ρυθμό που είναι ίσος με

$$\frac{|\Delta υ|}{\Delta t} = |a| = \frac{|\Sigma F|}{m} = \frac{|F_{αντ.}|}{m} \Rightarrow \quad \frac{|\Delta υ|}{\Delta t} = \frac{bυ}{m}.$$

Άρα σωστή είναι η (α).

Β2. Σωστή επιλογή είναι η (α).

Το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης δύο αρμονικών ταλαντώσεων με ίδιες συχνότητες βρίσκεται από τη σχέση $A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 συνφ}$

Στην περίπτωσή μας έχουμε $A_1 = A_2 = A$ και $συνφ = συν\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

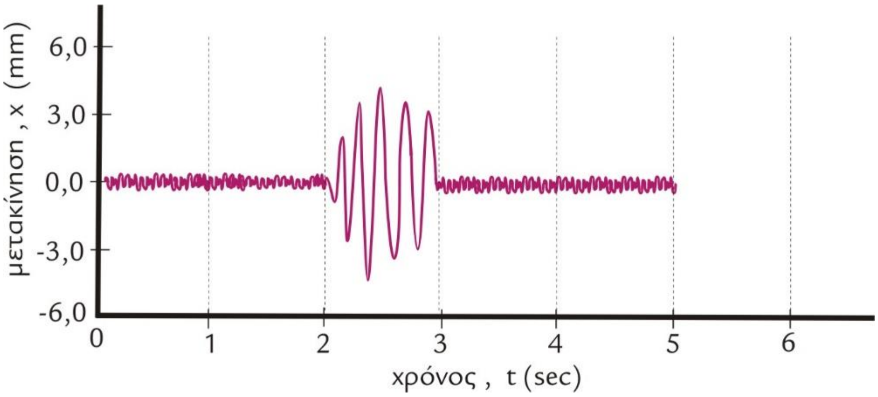
Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$A' = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2 \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2(-\frac{1}{2})} = A$$

Άρα, η μέγιστη ταχύτητα της σύνθετης ταλάντωσης είναι $\upsilon_{max.} = \omega \cdot A' = \omega \cdot A$

Άρα σωστή είναι η πρόταση (α).

Β3. Η σωστή επιλογή είναι το (γ).



Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι στο χρονικό διάστημα από $t_1 = 2s$ έως $t_2 = 3s$ πραγματοποιήθηκαν 5 πλήρεις ταλαντώσεις. Άρα, η συχνότητα των ταλαντώσεων που προκαλεί ο σεισμός (συχνότητα διεγέρτη) είναι

$$f_{\delta\iota\varepsilon\gamma.} = \frac{N}{\Delta t} = \frac{5\,\varepsilon\pi\alpha\nu\alpha\lambda\acute{\eta}\psi\varepsilon\iota\varsigma}{1s} \Rightarrow f_{\delta\iota\varepsilon\gamma.} = 5Hz \;.$$

Η ιδιοσυχνότητα ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή δίνεται από τη σχέση: $f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{M}}$.

Λύνοντας την προηγούμενη σχέση ως προς D και αντικαθιστώντας το f_o με $f_{\delta\iota\varepsilon\gamma.} = 5Hz$, θα βρούμε εκείνη τη σταθερά επαναφοράς που δεν πρέπει να έχει το κτίριο, καθώς στην περίπτωση αυτή το κτίριο θα βρεθεί σε συντονισμό και κινδυνεύει να καταρρεύσει.

Η αντικατάσταση δίνει:

$$D = 4\pi^2 M \cdot f_o^2 = 4 \cdot 10 \cdot \left(16 \cdot 10^5 kg\right) \cdot \left(5Hz\right)^2 \Rightarrow D = 16 \cdot 10^8\, N/m$$

Όταν η τιμή της σταθερά επαναφοράς του κτιρίου απομακρύνεται από την τιμή $D = 16 \cdot 10^8\, N/m$, απομακρύνεται και η ιδιοσυχνότητα του κτιρίου από την συχνότητα του διεγέρτη, μειώνοντας έτσι το πλάτος ταλάντωσης του κτιρίου στον σεισμό. Θα επιλέξουμε την πρόταση που έχει τιμές πολύ μακρύτερα από την $D = 16 \cdot 10^8\, N/m$.

Άρα σωστή είναι η πρόταση (γ).

Β4. Η σωστή επιλογή είναι το (β).

Έχουμε σύνθεση ταλαντώσεων με παραπλήσιες συχνότητες, άρα η σύνθετη ταλάντωση έχει συχνότητα $\overline{f} = \frac{f_1 + f_2}{2}$ και το πλάτος της μηδενίζεται με συχνότητα (συχνότητα διακροτήματος) $f_\delta = f_2 - f_1$.

Ένα υλικό σημείο που ταλαντώνεται διέρχεται 2 φορές από τη θέση ισορροπίας του, άρα η συχνότητα διέλευσής του από τη θέση ισορροπίας θα είναι:

$f_\alpha = 2\overline{f} \Rightarrow \quad f_\alpha = f_1 + f_2$ **(1)**

Σύμφωνα με την εκφώνηση, η συχνότητα μηδενισμού του πλάτους είναι $\frac{f_a}{50}$, άρα μπορούμε να γράψουμε: $f_\delta = \frac{f_a}{50} \Rightarrow \quad f_2 - f_1 = \frac{f_a}{50}$ **(2)**

Η λύση του συστήματος των (1) και (2) δίνει: $f_2 = \frac{51}{100} f_\alpha$ και $f_1 = \frac{49}{100} f_\alpha$

Η μείωση της συχνότητας f_2 κατά Δf οδηγεί σε απλή αρμονική ταλάντωση, αυτό σημαίνει ότι οι δύο ταλαντώσεις θα έχουν την ίδια συχνότητα, άρα $f_2 - \Delta f = f_1 \Rightarrow \quad f_2 - f_1 = \Delta f \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \frac{2}{100} f_\alpha$

Η αύξηση της f_2 κατά $\Delta f = \frac{f_a}{50}$ οδηγεί σε $f_2' = f_2 + \Delta f = \frac{51 f_a}{100} + \frac{2 f_a}{100} \Rightarrow \quad f_2' = \frac{53 f_a}{100}$.

Η νέα συχνότητα ταλαντώσεων θα γίνει $\overline{f'} = \frac{f_1 + f_2'}{2}$ και έτσι η νέα συχνότητα διελεύσεων από την θέση ισορροπίας θα είναι

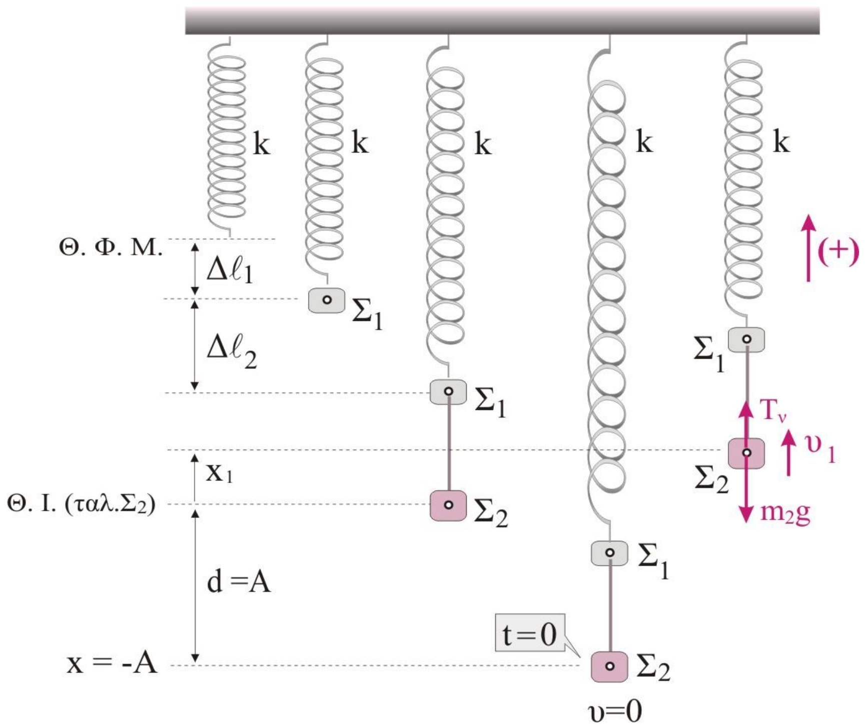
$$f_\alpha' = f_1 + f'_2 = \frac{49 f_a}{100} + \frac{53 f_a}{100} = \frac{102 f_a}{100} \Rightarrow \quad f_\alpha' = f_a + \frac{2}{100} f_a \quad \text{ή} \quad f_\alpha' = 1{,}02\, f_a$$

Άρα, σωστή είναι η πρόταση η (β).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος A=d=0,4m.

Η ενέργεια που δαπανήσαμε για να το εκτρέψουμε από τη θέση ισορροπίας του είναι ίση με την ενέργεια της ταλάντωσης , άρα $E_{\delta\alpha\pi.} = E_{\tau\alpha\lambda.} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\cdot 100\frac{N}{m}\cdot(0{,}4m)^2 \Rightarrow \quad E_{\delta\alpha\pi.} = 8J$



Γ2. Η γενική εξίσωση της απομάκρυνσης ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι:

$$x = A\,\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Επειδή το νήμα δεν χαλαρώνει τα δύο σώματα εκτελούν α.α.τ με κοινά χαρακτηριστικά, δηλαδή έχουν ίδια πλάτη, ίδιες συχνότητες και ίδιες αρχικές φάσεις.

Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος $Σ_2$ είναι Α=d=0,4m

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{100N/m}{1kg + 3kg}} \Rightarrow \omega = 5rad/s\,.$$

Τη χρονική στιγμή t=0s, x=-A, άρα $\varphi_o = \frac{3\pi}{2}$.

Άρα, η εξίσωση απομάκρυνσης του $Σ_2$ είναι: $x = 0,4\eta\mu(5t + \frac{3\pi}{2})\ (S.I.)$

Γ3. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του $Σ_2$ στην τυχαία θέση είναι:

$$\frac{dK_2}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F_2}}{dt} = \frac{\Sigma F_2 \cdot dx}{dt} = \Sigma F_2 \cdot \upsilon \;\Rightarrow\; \frac{dK_2}{dt} = m_2 \cdot a \cdot \upsilon = m_2 \cdot (-\omega^2 x) \cdot \upsilon \Rightarrow \;\; \frac{dK_2}{dt} = -m_2\omega^2 x\upsilon \;\; (1)$$

Με εφαρμογή τη διατήρηση ενέργειας για την ταλάντωση των σωμάτων $Σ_1$, $Σ_2$ βρίσκουμε την απομάκρυνση x_1 στην οποία η ταχύτητα του $Σ_2$ είναι $υ_1$=1m/s.

$$\mathrm{E} = \mathrm{K} + U \Rightarrow E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow 8 = \frac{1}{2}(1+3)\cdot 1^2 + \frac{100}{2}x_1^2 \ (SI) \Rightarrow 6 = 50x_1^2 \ (SI) \Rightarrow$$

$$x_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{5}m$$

Το σώμα $Σ_2$ ξεκινά ταλάντωση από την κάτω ακραία θέση, άρα η $2^η$ φορά που η ταχύτητα ταλάντωσης γίνεται +1m/s συμβαίνει καθώς το σώμα κατευθύνεται από τη θέση ισορροπίας προς την πάνω ακραία θέση, δηλαδή σε θετική απομάκρυνση, άρα $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{5}m$.

Με αντικατάσταση στην σχέση (1) βρίσκουμε

$$\frac{dK_2}{dt} = -(3kg)\cdot\left(5\frac{rad}{s}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{5}m\right)\cdot\left(1\frac{m}{s}\right) \Rightarrow \quad \frac{dK_2}{dt} = -15\sqrt{3}J/s$$

Γ4. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα $Σ_2$ είναι η τάση του νήματος $T_ν$ και το βάρος του w_2, άρα για την δύναμη επαναφοράς του $Σ_2$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\Sigma F_2 = -D_2 x \Rightarrow \mathrm{T}_\nu - m_2 g = -m_2\omega^2 x \Rightarrow \mathrm{T}_\nu = m_2 g - m_2\omega^2 x$$

Με αντικατάσταση $x=x_1$ παίρνουμε:

$$\mathrm{T}_\nu = 3kg\cdot\left(10\frac{m}{s^2}\right) - 3kg\cdot\left(5\frac{rad}{s}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{5}m\right) \Rightarrow \quad \mathrm{T}_\nu = 15(2-\sqrt{3})N$$

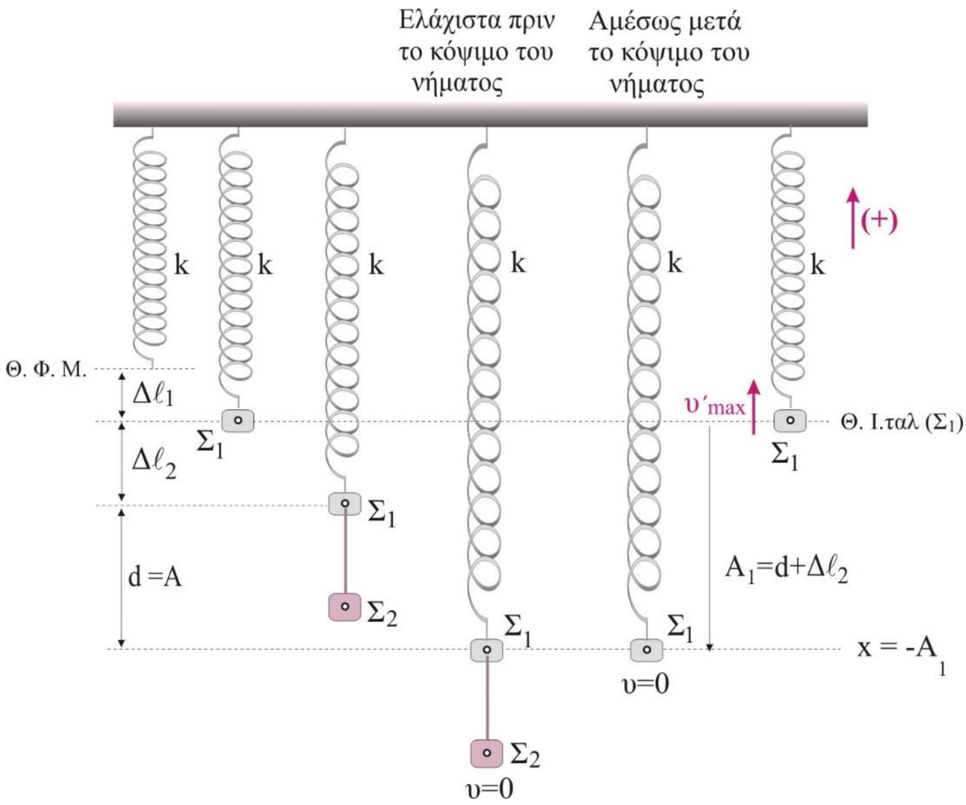
Γ5. Όταν κόψουμε το νήμα τη στιγμή που το $Σ_2$ βρίσκεται στην κατώτερη θέση της ταλάντωσης, το $Σ_1$ θα ξεκινήσει μια νέα ταλάντωση από την θέση $x=-A_1$, όπου A_1 το νέο πλάτος της ταλάντωσης.

Η θέση ισορροπίας της νέας ταλάντωσης θα μετατοπιστεί προς τα πάνω κατά $\Delta\ell_2$, που ισούται με την πρόσθετη επιμήκυνση του ελατηρίου που προκλήθηκε όταν στο σώμα $Σ_1$ προσδέσαμε το σώμα $Σ_2$. Προκύπτει

$$\Delta\ell_2 = \frac{m_2 g}{k} = \frac{3kg\cdot 10m/s^2}{100N/m} \Rightarrow \Delta\ell_2 = 0,3m$$

Άρα, το νέο πλάτος ταλάντωσης του $Σ_1$ είναι: $A_1 = A + \Delta\ell_2 = 0,4m + 0,3m \Rightarrow A_1 = 0,7m$

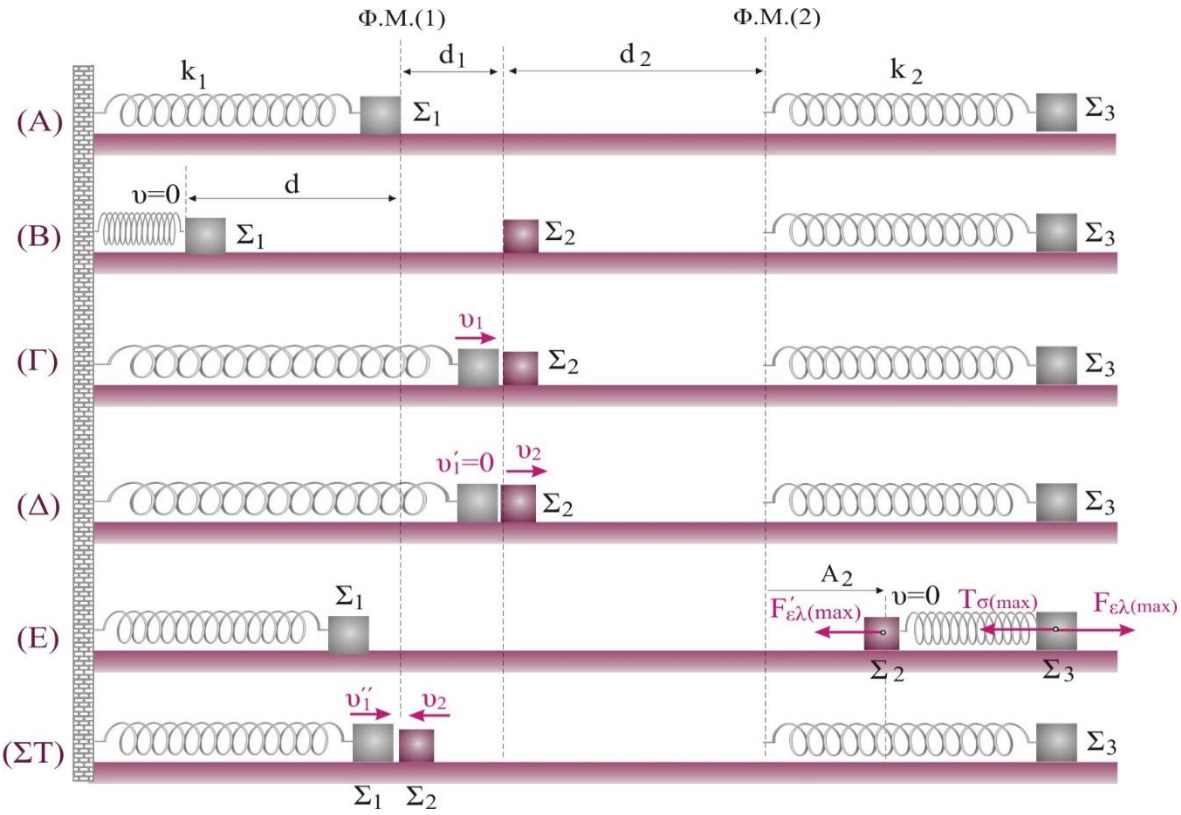
Η νέα γωνιακή συχνότητα του $Σ_1$ είναι $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{100N/m}{1kg}} \Rightarrow \omega_1 = 10rad/s$.



Έτσι, η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το $Σ_1$ καθώς διέρχεται από την νέα θέση ισορροπίας του είναι

$$\upsilon'_{max.} = \omega_1 \cdot A_1 = \left(10\,\frac{rad}{s}\right) \cdot 0{,}7\,m \Rightarrow \upsilon'_{max.} = 7\,\frac{m}{s}.$$

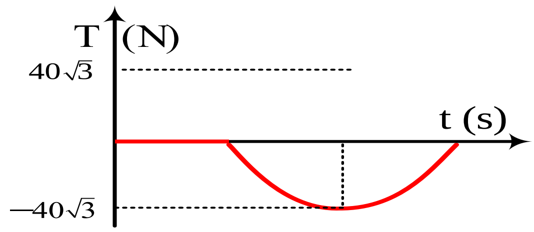
ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Τα σώματα Σ1, Σ2 συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ1 αμέσως μετά την κρούση να ξεκινά νέα αρμονική ταλάντωση με μηδενική ταχύτητα, δηλαδή τα δύο σώματα αντάλλαξαν ταχύτητες, $\upsilon_1' = \upsilon_2 = 0$. Στην κεντρική ελαστική κρούση όταν τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες έχουν ίσες μάζες, άρα $m_1 = m_2 = 1kg$.

Επιπλέον το σώμα Σ2 μετά την κρούση θα αποκτήσει ταχύτητα υ_2' ίση με αυτή που είχε το Σ1 στην απομάκρυνση $x_1=d_1$.

Η στατική τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ δαπέδου και σώματος Σ3 το κρατά ακίνητο, άρα κάθε στιγμή για το σώμα Σ3 ισχύει $\Sigma F_3 = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda.} - T_{\sigma\tau.} = 0$. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ3 στον οριζόντιο άξονα είναι, η $F_{\varepsilon\lambda}$ προς τα δεξιά και η $T_{\sigma\tau}$ προς τα αριστερά. Για τις μέγιστες τιμές τους θα ισχύει:



$$F_{\varepsilon\lambda.(\max)} - T_{\sigma\tau(\max)} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda.(\max)} = T_{\sigma\tau(\max)}$$

Σύμφωνα με το διάγραμμα της εκφώνησης $T_{\sigma\tau(\max)} = 40\sqrt{3}N$, άρα και $F_{\varepsilon\lambda.(\max)} = 40\sqrt{3}N$.

Δ2. Το σώμα Σ2 δεχόμενο την δύναμη του ελατηρίου εκτελεί τον μισό κύκλο μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης. Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο σώμα Σ2 από το ελατήριο είναι η $F_{\varepsilon\lambda.(\max)} = 40\sqrt{3}N$, άρα

$k_2 \cdot A_2 = 40\sqrt{3}N$ (1)

Η μεγιστοποίηση του μέτρου της στατικής τριβής συμπίπτει με την μεγιστοποίηση της δύναμης επαναφοράς του σώματος Σ2 και γίνεται μετά από χρονικό διάστημα $\frac{T_2}{4}$, που είναι ίσο με

$\Delta t_2 = \frac{\pi}{40}s$, άρα μπορούμε να βρούμε την περίοδο T_2.

$\frac{T_2}{4} = \frac{\pi}{40}s \Rightarrow T_2 = \frac{\pi}{10}s$.

Όμως , $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}}$, άρα $\frac{\pi}{10}s = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}} \Rightarrow k_2 = 400N/m$.

Με αντικατάσταση στην σχέση (1) παίρνουμε:

$$A_2 = \frac{F_{\varepsilon\lambda.\max}}{k_2} = \frac{40\sqrt{3}N}{400N/m}m \Rightarrow A_2 = 0,1\sqrt{3}m$$

Δ3. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 μετά την κρούση τους ανταλλάσσουν ταχύτητες, $\upsilon_2' = \upsilon_1$. Η ταχύτητα του σώματος Σ_2 μετά την κρούση, είναι και η μέγιστη ταχύτητα της απλής αρμονικής ταλάντωσής του συστήματος m_2-k_2, που ακολουθεί, $\upsilon_2' = \upsilon_{2,\max.}$. Έτσι έχουμε:

$$\upsilon_1 = \upsilon_{2,\max.} = \omega_2 \cdot A_2 = \frac{2\pi}{T_2} \cdot A_2 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{2\pi}{0,1\pi s} \cdot 0,1\sqrt{3}m \Rightarrow \upsilon_1 = 2\sqrt{3}m/s$$

Δ4. Η εξίσωση της απομάκρυνσης του Σ_1 μετά την κρούση είναι:

$x_1' = A_1'\eta\mu(\omega_1 t' + \varphi_0)$ (2)

Το σώμα Σ_1 ξεκινά την νέα ταλάντωση από τη θέση $x_1' = A_1'$, άρα $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{100N/m}{1kg}} \Rightarrow \omega_1 = 10rad/s .$$

Το πλάτος $A_1' = d_1$ θα το βρούμε από τα στοιχεία της αρχικής ταλάντωσης του Σ_1.

Η εξίσωση της απομάκρυνσης του Σ_1 από τη στιγμή $t_o = 0s$ έως τη στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{15}s$ που γίνεται η κρούση περιγράφεται από τη σχέση:

$x_1 = A_1 \eta\mu(\omega_1 t' + \varphi_0)$ ή $x_1 = d \cdot \eta\mu(10t' + \frac{3\pi}{2})$ (3)

και η ταχύτητα από τη σχέση: $\upsilon_1 = 10d \cdot \sigma\upsilon\nu(10t' + \frac{3\pi}{2})$ (4)

Στην τελευταία σχέση για την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{15}s$ γνωρίζουμε ότι $\upsilon_1 = 2\sqrt{3}m/s$.

Αντικαθιστούμε στην σχέση (4) και λύνουμε ως προς d.

$$2\sqrt{3} = 10d\sigma\upsilon\nu(10\frac{\pi}{15} + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow 2\sqrt{3} = 10d\sigma\upsilon\nu(2\pi + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow 2\sqrt{3} = 10d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d = 0,4m .$$

Η θέση που έγινε η κρούση βρίσκεται με αντικατάσταση στη σχέση (3).

Είναι $d_1 = x_1 = d\eta\mu(\omega_1 t_1 + \frac{3\pi}{2}) = 0,4 \cdot \eta\mu(2\pi + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow d_1 = 0,2m$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) προκύπτει η εξίσωση της απομάκρυνσης της νέας ταλάντωσης του σώματος Σ_1, προκύπτει:

$$x_1' = 0,2 \cdot \eta\mu(10t' + \frac{\pi}{2}) \ (SI)$$

Δ5. Το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να περάσει το Σ_1 από τη θέση ισορροπίας του για 2^{η} φορά είναι $\Delta t = 3 \cdot \frac{T_1}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2\pi}{10}s = \frac{3\pi}{20}s$.

Στο ίδιο χρονικό διάστημα το σώμα Σ_2 θα κάνει μισή ταλάντωση σε χρονικό διάστημα $\frac{T_2}{2}$ και θα διατρέξει το διάστημα $2d_2 + d_1$ με ταχύτητα $\upsilon_2 = 2\sqrt{3}m/s$.

Έτσι έχουμε $\frac{2d_2 + d_1}{\upsilon_2} + \frac{T_2}{2} = \Delta t \Rightarrow$

$$\frac{2d_2 + 0,2}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{20} = \frac{3\pi}{20} \Rightarrow 2d_2 + 0,2 = 2\sqrt{3} \cdot \frac{2\pi}{20} \Rightarrow 2d_2 = 0,2\pi\sqrt{3} - 0,2 \Rightarrow d_2 = 0,44m$$

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:
Τα θέματα επιμελήθηκαν οι **Δουκατζής Βασίλειος** και **Κορκίζογλου Πρόδρομος, Φυσικοί.**
Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τον **Παλόγο Αντώνιο, Φυσικό.**