Αναλύοντας τον ορισμό
της απλής αρμονικής ταλάντωσης

(Στα παρακάτω αναφερόμαστε για ευκολία σε ευθύγραμμες κινήσεις,
μιας και η επέκταση σε περισσότερες διαστάσεις είναι αυτονόητη
και τα συμπεράσματα αναλλοίωτα)

<u>Σκοπός αυτής της εργασίας:</u>
Να τονιστεί ότι οι ορισμοί της Φυσικής είναι απαραίτητη προϋπόθεση της αυστηρής γλώσσας της και συνεπώς εγγύηση της άξιας και δυναμικής σκέψης της.

Πιο απλά:
Όταν χαλάμε τους ορισμούς, τότε χαλάμε τη γλώσσα μας και συνεπώς χαλάμε τη σκέψη μας.

<u>Τρόπος επίτευξης σκοπού:</u>
Μέσω της ανάλυσης του ορισμού της απλής αρμονικής ταλάντωσης (α.α.τ.), ***θα αναδειχθεί*** *η εννοιολογική και μαθηματική αυστηρότητα του ορισμού της,* ***θα καταγραφούν*** *οι οριοθετήσεις του ώστε να αποφεύγονται τα λάθη και* ***θα εντοπισθούν*** *οι κίνδυνοι κατά την κακή χρήση του.*

Ο ορισμός της απλής αρμονικής ταλάντωσης (α.α.τ.):

Η κίνηση μάζας m ονομάζεται **απλή αρμονική ταλάντωση** (α.α.τ.) όταν η συνισταμένη δύναμη που δρα στη μάζα είναι *(χωροεξαρτώμενη, κεντρική, συντηρητική(*))* της μορφής

$$F(x) = -Dx \quad {}^{(**)}$$

Ας δούμε πόσο αυστηρός είναι αυτός ο ορισμός και πόσο αυστηρές είναι οι οριοθετήσεις που επιβάλλει στη διδασκαλία μας

<u>Όταν διδάσκουμε ότι</u>

«Για να αποδείξουμε ότι ένα υλικό σημείο κάνει α.α.τ. αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνισταμένη των δυνάμεων πάνω του (δύναμη επαναφοράς) είναι της μορφής $F(x) = -Dx$ με $D > 0$»

<u>εννοούμε τούτο:</u>

«Για να αποδείξουμε ότι ένα υλικό σημείο κάνει α.α.τ. αρκεί να αποδείξουμε ότι

- Η συνισταμένη των δυνάμεων πάνω του είναι της μορφής $F(x) = -Dx$ με $D > 0$
- Η συνισταμένη αυτή δύναμη είναι (γνήσια) **χωροεξαρτώμενη** (συντηρητική) δύναμη

(*) *Οι χαρακτηρισμοί αυτοί για τη συγκεκριμένη δύναμη αποτελούν πλεονασμό, αλλά αναφέρονται για να τους δοθεί έμφαση*

(**) *Η γενική περίπτωση $F(x) = -D(x-\alpha)$ απλώς μεταθέτει τη θέση του ελκτικού κέντρου στο x=α, αλλά δεν αλλάζει τίποτε από όσα ακολουθούν. Ουσιαστικά είναι μια απλή αλλαγή αρχής συντεταγμένων.*

- *Το υλικό σημείο δε βρίσκεται αρχικά στο ελκτικό κέντρο x=0 της δύναμης $F(x)$ με ταχύτητα μηδέν (γιατί αλλιώς θα συνεχίσει να βρίσκεται σε κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας και δε θα κινείται)»*

Με άλλα λόγια για να χαρακτηρίσουμε μια κίνηση ως α.α.τ πρέπει, εκτός από τη μορφή της συνισταμένης δύναμης, να εξασφαλίσουμε και την ποιότητά της.

Πρέπει δηλαδή να εξετάσουμε αν η συνισταμένη δύναμη $F(x) = -Dx$ είναι όντως χωροεξαρτώμενη, μιας και αυτή η ιδιότητα θα εξασφαλίσει **«το πακέτο»** με εκείνα τα χαρακτηριστικά που θα μας επιτρέψουν να ονομάσουμε μια κίνηση απλή αρμονική ταλάντωση.

Το πακέτο κάποιων χαρακτηριστικών της α.α.τ.

1. Η (συνισταμένη) δύναμη που ελέγχει μια α.α.τ. είναι **χωροεξαρτώμενη** της μορφής $F(x) = -Dx$ και συνεπώς συντηρητική.
   Όπως όλες οι συντηρητικές δυνάμεις, η *F(x)* συνδέεται με την έννοια της δυναμικής ενέργειας $U(x)$, μέσω της σχέσης $F(x) = -\dfrac{dU(x)}{dx}$
2. Στην α.α.τ. υπάρχει ελκτικό κέντρο της χωροεξαρτώμενης δύναμης στο *x=0* που είναι και σημείο ελάχιστης δυναμικής ενέργειας. Αν σταματήσουμε το υλικό σημείο μάζας *m* στο *x=0* τότε η μάζα θα βρεθεί σε κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας
3. Η μηχανική ενέργεια του υλικού σημείου διατηρείται
4. Η σταθεράς επαναφοράς D έχει αξία. Όλα τα μεγέθη της κίνησης θα καθοριστούν από δύο παραμέτρους, τη μάζα *m* και την σταθερά *D* *(και βέβαια τις αρχικές συνθήκες)*
5. Οι συναρτήσεις που αφορούν τη δύναμη και τη δυναμική ενέργεια εξαρτώνται μόνο από τη θέση (από το χώρο) και όχι από τη χρονική στιγμή (χρόνο). Πρέπει συνεπώς να μένουν ίδιες στο χώρο ακόμη και όταν επιβάλλονται άλλες συνθήκες (π.χ. ακινησία, άλλες αρχικές συνθήκες, άλλες εξωτερικές συνθήκες όπως π.χ. μια κρούση).

κ.λ.π

Κοντολογίς λοιπόν λέμε ότι στην α.α.τ. υπάρχει συγκεκριμένη μορφή συνισταμένης δύναμης και συνεπώς συγκεκριμένες ιδιότητες συμπεριφοράς του συστήματος.

Με άλλα λόγια **υπάρχει συγκεκριμένος τρόπος αλληλεπίδρασης της *m* με το περιβάλλον D**.

Ας κάνουμε τα παραπάνω πιο σαφή με κάποια παραδείγματα

1ο παράδειγμα

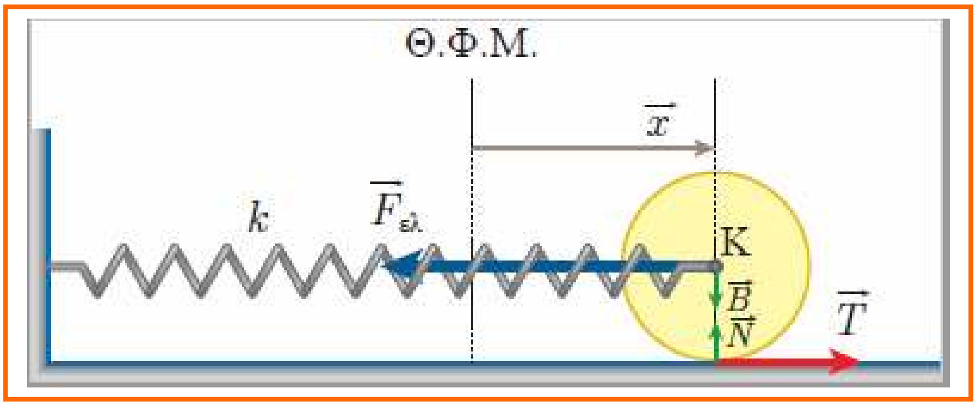
Ο συμπαγής κύλινδρος του σχήματος 1 έχει μάζα *m*, ακτίνα *R* και κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Το ελατήριο έχει σταθερά *k* .

Να εξεταστεί αν η κίνηση του κέντρου μάζας του είναι απλή αρμονική ταλάντωση (α.α.τ.)

(Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$)

Λύση

Λύνοντας την άσκηση ώστε οι δυνάμεις που ελέγχουν την κίνηση του σώματος να εκφρασθούν συναρτήσει της απομάκρυνσης x από τη θέση ισορροπίας του κυλίνδρου *(θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου)* προκύπτει (*)



Σχήμα 1

Η δύναμη του ελατηρίου είναι $\quad F_{ελ} = -kx \quad (1)$

Η συνισταμένη δύναμη είναι $\quad F_{ολ} = -\frac{2}{3}kx \quad (2)$

Η στατική τριβή είναι $\quad T = \frac{1}{3}kx \quad (3)$

Φροντίσαμε όλες οι παραπάνω δυνάμεις να είναι τυπικά της ίδιας μορφής $F=-Dx$, αλλά αυτό είναι καθαρά προϊόν του τρόπου που αντιμετωπίσαμε το σύστημα των εξισώσεων του Νεύτωνα για την κίνηση του κυλίνδρου, δηλαδή του ότι επιδιώξαμε να εκφράσουμε τις δυνάμεις συναρτήσει του x.

Η ποιότητα (ουσία) όμως της συνισταμένης δύναμης $F_{ολ}$ πάνω στον κύλινδρο δεν επιτρέπει να την χαρακτηρίσουμε χωροεξαρτώμενη, όπως απαιτεί η α.α.τ., και συνεπώς δεν επιτρέπεται να χαρακτηρίσουμε την κίνηση του κυλίνδρου (ή έστω την κίνηση του κέντρου μάζας του ως α.α.τ)

Ο λόγος είναι απλός:

Το κύριο χαρακτηριστικό μιας χωροεξαρτώμενης συντηρητικής δύναμης π.χ. της $F=-Dx$ είναι το ότι εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από τη θέση στο χώρο στην οποία θα βρεθεί το σώμα.

Άρα αν ένα σώμα βρεθεί σε συγκεκριμένη θέση, είτε ακίνητο είτε κινούμενο, η χωροεξαρτώμενη δύναμη θα είναι πάντα η ίδια *(και σε μέτρο και σε κατεύθυνση)* .

Για να αποκαλυφθούν λοιπόν οι (γνήσιες) χωροεξαρτώμενες δυνάμεις σε ένα υλικό σημείο αρκεί … να το σταματήσουμε.

(*) *Οι σχέσεις (1), (2) και (3) δίνουν τις αλγεβρικές τιμές των δυνάμεων και συνεπώς την κατευθυνσή τους σε σχέση με την κατεύθυνση της απομάκρυνσης x*

Τότε οι χωροεξαρτώμενες δυνάμεις θα έχουν την ίδια τιμή που είχαν και τη στιγμή λίγο πριν το σταματήσουμε και θα παραμείνουν ακριβώς ίδιες για όσο χρονικό διάστημα το σώμα είναι σταματημένο.

<u>Καθώς λοιπόν κινείται ο κύλινδρος τον πιάνουμε και τον σταματάμε σε τυχαίο σημείο.</u> Τότε

- η στατική τριβή T καταργείται αμέσως (μηδενίζεται)
- η συνισταμένη δύναμη $F_{ολ} = F_{ελ} + T$ μεταβάλλεται αμέσως από $F_{ολ} = -\frac{2}{3}kx$ σε $F_{ολ} = -kx$
- η δύναμη του ελατηρίου $F_{ελ}$ μένει ακριβώς ίδια (όπως ήταν και πριν σταματήσουμε το σώμα) όσος χρόνος και να περάσει

Άρα η μόνη χωροεξαρτώμενη δύναμη είναι η δύναμη του ελατηρίου. Η στατική τριβή Τ και η συνισταμένη δύναμη $F_{ολ}$ δεν είναι.

(Οι δυνάμεις T και $F_{ολ}$ και οι δυναμικές τους ενέργειες είναι αδύνατο να αντιμετωπιστούν σωστά μαθηματικά ΚΑΙ γιατί είναι αδύνατο να γραφεί πεδίο ορισμού για το x στις σχέσεις 2, 3 ανεξάρτητο από την κίνηση ή όχι του κυλίνδρου, καθώς και από το είδος της κίνησής του)

Συμπέρασμα

Η συνισταμένη δύναμη πάνω στον κύλινδρο μπορεί να πήρε λόγω ειδικής επίλυσης του συστήματος κάποιων εξισώσεων τη μορφή $F_{ολ} = -\frac{2}{3}kx = -Dx$, αλλά δεν είναι χωροεξαρτώμενη δύναμη και συνεπώς η κίνηση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου δεν είναι απλή αρμονική ταλάντωση.

Αν παρόλα αυτά θεωρήσουμε τις παραπάνω δυνάμεις (2) και (3) χωροεξαρτώμενες (συντηρητικές), τότε

α) Θα πρέπει να τις συνδέσουμε με σταθερές επαναφοράς

Δύναμη του ελατηρίου $F_{ελ} = -kx = -D_{ελ}x$

Συνισταμένη δύναμη $F_{ολ} = -\frac{2}{3}kx = -Dx$

Στατική τριβή $T = \frac{1}{3}kx = D_T x$

Και συνεπώς με δυναμικές ενέργειες

Δυναμική ενέργεια λόγω ελατηρίου $U_{ελ} = \frac{1}{2}D_{ελ}x^2$

Δυναμική ενέργεια λόγω της συνισταμένης δύναμης $U = \frac{1}{2}Dx^2$

Δυναμική ενέργεια λόγω στατικής τριβής ι $U_T = -\frac{1}{2}D_T x^2$

β) Θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι η μηχανική ενέργεια του κυλίνδρου διατηρείται και είναι πάντα

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}\frac{2}{3}kA^2 = \frac{1}{3}kA^2$$

επειδή η δύναμη επαναφοράς είναι $F_{ολ} = -\frac{2}{3}kx = -Dx$

γ) Αν «σπάσουμε» την κίνηση σε μεταφορική και περιστροφική, ίσως χρειαστεί να διδάξουμε ότι ισχύει η παρακάτω ενεργειακή «κατανομή»

<u>Ενέργεια στη μεταφορική κίνηση κυλίνδρου:</u>

Δυναμική ενέργεια λόγω ελατηρίου
+ δυναμική ενέργεια λόγω στατικής τριβής
+ κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς (4)

<u>Περιστροφική κίνηση κυλίνδρου</u>

Δυναμική ενέργεια λόγω στατικής τριβής
+ κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής (5)

Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να δικαιολογήσουμε ότι κατά την πρόσθεση των σχέσεων (4) και (5), προκειμένου να υπολογίσουμε την ενέργεια του κυλίνδρου σε τυχαία θέση, πρέπει κάποιοι προσθετέοι να είναι αρνητικοί (!!!) γιατί πρέπει το αποτέλεσμα της πρόσθεσης να είναι $E = \frac{1}{3}kA^2$.

δ) Αργά ή γρήγορα θα αναγκαστούμε να δεχτούμε ότι και η τριβή ολίσθησης, όπως και η στατική τριβή, μπορεί να θεωρηθεί χωροεξαρτώμενη συντηρητική δύναμη και συνεπώς μπορεί να θεωρηθεί συνδεδεμένη με δυναμική ενέργεια (!!!)

Τελικά πιθανώς να χρειαστεί να δικαιολογήσουμε στα παιδιά ότι:

- Στην ακραία θέση όπου ο κύλινδρος στιγμιαία έχει σταματήσει η ενέργεια του κυλίνδρου είναι $E = \frac{1}{3}kA^2$, ενώ θα έπρεπε εκείνη τη στιγμή η ενέργεια του κυλίνδρου να είναι $E = \frac{1}{2}kA^2$ μιας και οφείλεται αποκλειστικά στην δυναμική του ενέργεια λόγω της δύναμης του ελατηρίου

- Η τριβή ολίσθησης δεν συνδέεται με δυναμική ενέργεια και συνεπώς τα προβλήματα τριβής δε μπορούν να «επιλυθούν» με διατήρηση μηχανικής ενέργειας
(βλέπε παράδειγμα 3)

<u>Συμπέρασμα</u>

Συνεπώς η κίνηση του κυλίνδρου (ή έστω του κέντρου μάζας του) δεν είναι α.α.τ.

2ο παράδειγμα:

Οποιαδήποτε κίνηση με εξίσωση της μορφής *x=Αημ(ωt+φ),* όπως για παράδειγμα το καταληκτικό στάδιο μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης με απόσβεση, οδηγεί σε επιτάχυνση της μορφής $a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 x$ και άρα σε συνισταμένη δύναμη της μορφής $F=ma=-m\omega^2 x$.

Αν μπούμε στον πειρασμό να αντικαταστήσουμε $D=m\omega^2$ και να γράψουμε $F=-Dx$ τότε υπάρχει κίνδυνος να θεωρήσουμε τη συνισταμένη δύναμη *F* χωροεξαρτώμενη συντηρητική, να μετατρέψουμε την εξαναγκασμένη κίνηση σε α.α.τ. και να συμπεράνουμε ότι η ενέργεια ενός εξαναγκασμένου ταλαντωτή με αποσβέσεις είναι σταθερή και ίση με $E=\frac{1}{2}DA^2$.

Και θα κάνουμε αυτό το λάθος τη στιγμή που ξέρουμε ότι σε μια εξαναγκασμένη με απόσβεση ταλάντωση

- δρουν στον εξαναγκασμένο ταλαντωτή και η τριβή $T=-b\upsilon$ (δύναμη που εξαρτάται από ταχύτητα!!!!) και η χρονοεξαρτώμενη δύναμη του διεγέρτη $F_\delta=F_0\eta\mu\omega t$
- η ενέργεια δεν είναι σταθερή

Προσοχή λοιπόν:

Η αντικατάσταση $D=m\omega^2$ μπορεί να μας παρασύρει στο λάθος να θεωρήσουμε ως χωροεξαρτώμενη μια συνισταμένη δύναμη που είναι καθαρά χρονοεξαρτώμενη.

Από την εμπειρία του 1ου παραδείγματος θα πρέπει να περιμένουμε, ότι θα υπάρξουν «περίεργες» ασκήσεις, με συστήματα εξισώσεων στα οποία αν εμπλακεί έστω και μια χωροεξαρτώμενη (χρονοανεξάρτητη) δύναμη της μορφής $F_{\varepsilon\lambda}=-kx$, θα μας καταστήσει ικανούς να βρούμε όλες τις υπόλοιπες δυνάμεις συναρτήσει αυτής της χωροεξαρτώμενης δύναμης και άρα συναρτήσει του x.
Τότε όλες οι δυνάμεις της άσκησης, μπορούν να αποκτήσουν την ίδια μορφή $F=-Dx$, και να «απαιτήσουν» **να τις θεωρήσουμε χωροεξαρτώμενες.**

Στις περίεργες αυτές ασκήσεις, αν οι δυνάμεις που θα γίνουν χωροεξαρτώμενες δεν είναι τριβές ώστε να έχουμε και κάποια άμυνα για να τις αποκλείσουμε από το χαρακτηρισμό, θα εμπλουτιστούν με ιδιότητες που στην πραγματικότητα δε θα έχουν.
Αυτό γρήγορα θα αποδειχτεί αχίλλειος φτέρνα και της διδασκαλίας μας και των συλλογισμών μας και των ορισμών μας και των μοντέλων μας και.... και..... και.....

Το είχα γράψει παλιά σε άλλο μου κείμενο αλλά ας το ξαναπώ:

«...Οι τριβές (και γενικότερα οι δυνάμεις) σε ένα πρόβλημα μπορεί να εκφράζονται συναρτήσει του x, αλλά αυτό γίνεται, όχι γιατί είναι χωροεξαρτώμενες δυνάμεις και άρα συνδεδεμένες με δυναμική ενέργεια (και με α.α.τ.), αλλά γιατί απλούστατα λύσαμε τις σχέσεις που γράψαμε ως προς τις συντηρητικές δυνάμεις.
Έτσι λοιπόν, το γεγονός ότι μετά την επίλυση οι τριβές ή οι συνισταμένες δυνάμεις εκφράζονται συναρτήσει του x, δε σημαίνει απολύτως τίποτε.
Τί να σημαίνει δηλαδή ότι βρήκαμε την τριβή T συναρτήσει της $F_{\varepsilon\lambda}$ και άρα του x; Σημαίνει μήπως ότι η τριβή T έγινε ξαφνικά συντηρητική δύναμη; Σαφώς και όχι!!!!
Δηλαδή αν λύναμε την $F_{\varepsilon\lambda}$ ως προς T, η δύναμη του ελατηρίου θα ήταν απόσβεση; Θα την είχαμε κάνει τριβή;
Άλλο οι μαθηματικές τακτικές ενός συστήματος εξισώσεων και άλλο η φυσική ουσία των εξισώσεων και των συμβόλων...»

3ο παράδειγμα

Μια σταθερή δύναμη F είναι χωροεξαρτώμενη και συντηρητική και άρα μπορεί να συνδεθεί με δυναμική ενέργεια U

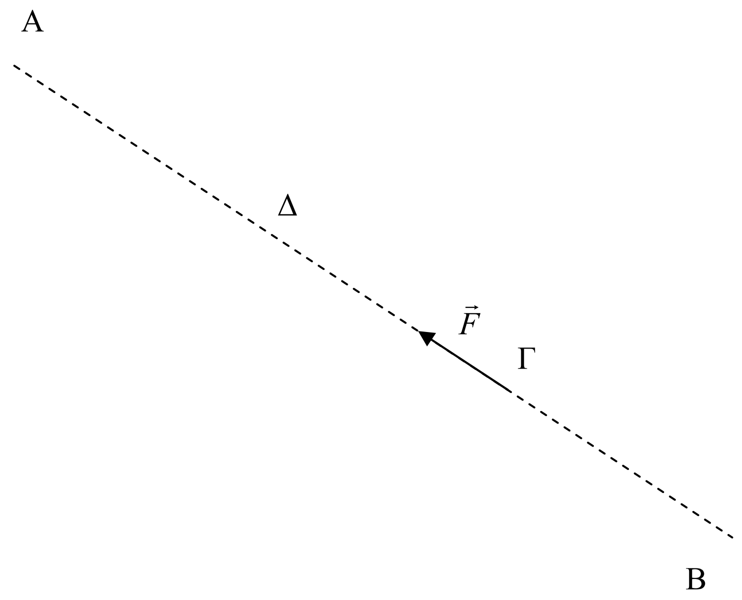
Πράγματι:

$$F = -\frac{dU}{dx} \quad \text{από όπου} \quad U = -Fx$$

Ως σημείο αναφοράς (μηδενισμού) της δυναμικής ενέργειας επιλέξαμε το x=0.
Τα F και x θεωρούνται αλγεβρικά

Αν **δεν θελήσουμε** να χρησιμοποιήσουμε αλγεβρικές τιμές, τότε η δυναμική ενέργεια γράφεται $U=Fd$, όπου τώρα το F είναι το μέτρο της σταθερής δύναμης και d είναι η απόσταση του υλικού σημείου που δέχεται την F από **το «τελευταίο»** (*) σημείο του προβλήματος κατά τη διεύθυνση της F. Το σημείο αυτό θεωρήσαμε σημείο αναφοράς (μηδενισμού δηλαδή) της δυναμικής ενέργειας.

Για παράδειγμα ας δούμε το παρακάτω σχήμα:



Η $\vec{F}$ είναι σταθερή δύναμη.

Αν σημείο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας ου είναι συνδεδεμένη μαζί της θεωρηθεί **το «τελευταίο»** του προβλήματος, δηλαδή το Α, τότε η δυναμική ενέργεια του υλικού σημείου παντού πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι θετική:

στο Β η δυναμική ενέργεια είναι $F \cdot (AB)$

στο Γ η δυναμική ενέργεια είναι $F \cdot (A\Gamma)$

στο Δ η δυναμική ενέργεια είναι $F \cdot (A\Delta)$

(*) *Με τη φράση **«τελευταίο»** σημείο του προβλήματος εννοώ το σημείο εκείνο προς το οποίο η F «τραβά» το υλικό σημείο και από το οποίο σημείο και μετά δεν υπάρχουν άλλα σημεία που να μας ενδιαφέρουν στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Προφανώς παίρνουμε το **«τελευταίο»** του προβλήματος, για να μη μας προκύψουν αρνητικές δυναμικές ενέργειες. Αν όμως θέλουμε ή αναγκαστούμε, μπορούμε να πάρουμε ως σημείο αναφοράς ένα τυχαίο σημείο. Τότε αν είμαστε πέρα από αυτό το σημείο προς τη διεύθυνση της F η δυναμική θα είναι θετική, αλλιώς θα είναι αρνητική*

Αν σημείο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας που συνδέεται με την $\vec{F}$ θεωρηθεί το Δ, τότε η δυναμική ενέργεια του υλικού σημείου, είναι αλλού θετική και αλλού αρνητική

στο Β είναι $F\cdot(\Delta B)$

στο Γ είναι $F\cdot(\Delta\Gamma)$

στο Δ είναι $-F\cdot(A\Delta)$

Αν σημείο αναφοράς δυναμικής ενέργειας θεωρηθεί το B τότε η δυναμική ενέργεια του υλικού σημείου παντού στο τμήμα AB είναι αρνητική

Αυτά μας είναι πιο οικεία και τα έχουμε ήδη εφαρμόσει στο πεδίο βαρύτητας

Σε ομογενές βαρυτικό πεδίο, το βάρος ενός σώματος είναι μια σταθερή δύναμη mg.
Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω συνδέεται με δυναμική ενέργεια $U=-mgx$ *(σημείο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας το $x=0$, τα g και x με αλγεβρικές τιμές)*

Αν δε θελήσουμε να χρησιμοποιήσουμε αλγεβρικές τιμές και ως σημείο αναφοράς (μηδενισμού) της δυναμικής ενέργειας παρθεί το **«τελευταίο»** του προβλήματος (που στο πεδίο βαρύτητας το λέμε και *«χαμηλότερο»* σημείο του προβλήματος), η δυναμική ενέργεια θα είναι $U=mgh$, όπου h είναι η απόσταση (ύψος) από το *«τελευταίο» («χαμηλότερο»)* σημείο του προβλήματος.
Αν ως σημείο αναφοράς (μηδενισμού) της δυναμικής ενέργειας δεν παρθεί το *«τελευταίο»*, το *«χαμηλότερο»* δηλαδή σημείο του προβλήματος, αλλά το *«ψηλότερο»*, τότε όλες οι δυναμικές ενέργειες λόγω βάρους θα βγουν αρνητικές.

Ερώτηση

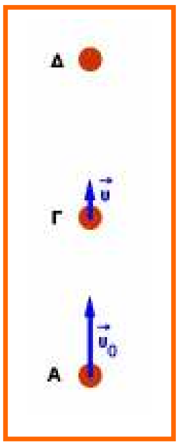
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο βολές σε πεδίο σταθερής δύναμης

A. Βολή προς τα πάνω σε πεδίο βαρύτητας

B. «Βολή» σε οριζόντιο επίπεδο που δεν είναι λείο.

Είναι σωστές οι παρακάτω αντιμετωπίσεις;

A. Βολή προς τα πάνω σε πεδίο βαρύτητας Β=mg=σταθερό



Το σώμα φτάνει μέχρι το σημείο Δ

Στο Α έχει μόνο κινητική ενέργεια $1/2mυ_0^2$

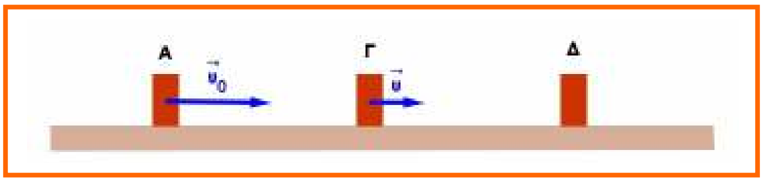
Στο Γ έχει κινητική $1/2mυ^2$ και δυναμική λόγω βάρους mg(ΑΓ)

Στο Δ έχει μόνο δυναμική λόγω βάρους mg(ΑΔ)

Από Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας έχουμε

$$1/2m\upsilon_0^2 = 1/2m\upsilon^2 + mg(A\Gamma) = mg(A\Delta)$$

B. Βολή» σε οριζόντιο επίπεδο με τριβή $T=\mu N=\mu mg=$σταθερό



Το σώμα φτάνει μέχρι το σημείο Δ

Στο Α έχει μόνο κινητική ενέργεια $1/2mυ_0^2$

Στο Γ έχει κινητική $1/2mυ^2$ και δυναμική λόγω ... τριβής mg(ΑΓ)

Στο Δ έχει μόνο δυναμική λόγω ... τριβής mg(ΑΔ)

Από Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας έχουμε

$$1/2mυ_0^2 = 1/2mυ^2 + \mu mg(ΑΓ) = \mu mg(ΑΔ)$$

Απάντηση

Όχι δεν είναι. Η περίπτωση Β είναι λανθασμένη.

Περίπτωση Α:

Σταματάμε το σώμα σε τυχαία θέση. Το βάρος παραμένει αμετάβλητο B=mg όση ώρα κι αν κρατήσουμε σταματημένο το σώμα.
Άρα το βάρος είναι σταθερή χωροεξαρτώμενη (συντηρητική) δύναμη και συνεπώς έχουμε δικαίωμα να τη συνδέσουμε με δυναμική ενέργεια και να επικαλεστούμε διατήρηση μηχανικής ενέργειας.

Περίπτωση Β:

Σταματάμε το σώμα σε τυχαία θέση. Η τριβή αμέσως μηδενίζεται (μεταβάλλεται).
Άρα η τριβή είναι σταθερή αλλά δεν είναι χωροεξαρτώμενη (συντηρητική) δύναμη και συνεπώς δεν έχουμε δικαίωμα ούτε να τη συνδέσουμε με δυναμική ενέργεια ούτε και να επικαλεστούμε διατήρηση μηχανικής ενέργειας.

Το βάρος και η τριβή μπορεί ως δυνάμεις να έχουν την ίδια «μορφή» (σταθερές και οι δυο), αλλά δεν έχουν την ίδια ποιότητα.
Η μία είναι χωροεξαρτώμενη, ενώ η άλλη δεν είναι.

Αυτό φαίνεται και με τον άλλον, επίσης σημαντικό, τρόπο που αναφέραμε παραπάνω:
Για το βάρος μπορεί άνετα να γραφεί πεδίο ορισμού ανεξάρτητα με το τι θα συμβεί κατά την διάρκεια της κίνησης (βολής) του σώματος, ενώ για την τριβή δεν είναι δυνατόν να γραφεί πεδίο ορισμού τέτοιας δυναμικής.
….

Για να ξεχωρίσουμε αν μια δύναμη είναι (γνήσια) χωροεξαρτώμενη, πρέπει ως πρώτο βήμα να «σταματήσουμε» το χώρο και να αφήσουμε το χρόνο να κυλήσει.

Πρέπει έστω και «νοερά» να σταματήσουμε το σώμα σε κάποιο τυχαίο σημείο.

Αν η δύναμη με σταματημένο το σώμα σε κάποιο τυχαίο σημείο είναι ακριβώς ίδια όπως και πριν το σταματήσουμε, είναι μια καλή ένδειξη ότι μπορεί και να είναι χωροεξαρτώμενη.
Αν η δύναμη με σταματημένο το σώμα αλλάξει, σίγουρα δεν είναι χωροεξαρτώμενη.

Έτσι αποκλείονται οι φιλοδοξίες των τριβών να γίνουν συντηρητικές δυνάμεις!!!

Αν δε θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε «φανταστικά» χέρια που αρπάζουν τα σώματα, ας περιμένουμε να δούμε τι θα συμβεί σε μια πιθανή κρούση, ή τέλος πάντων τη συμπεριφορά των σωμάτων σε κάποιο άλλο φαινόμενο.
Με λίγα λόγια, πρέπει να πάψουμε να βλέπουμε τα σώματα μόνο να κινούνται και να επαναπαυόμαστε με την εξίσωση κίνησής τους.

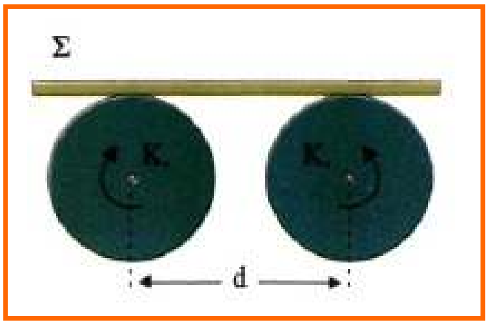
Πρέπει να περιμένουμε να μας δείξουν ή να τα προκαλέσουμε να μας δείξουν, έστω και «νοερά» πώς θα αλληλεπιδράσουν με το περιβάλλον τους.

4ο παράδειγμα:

(Άσκηση 4.70 του σχολικού βιβλίου)

Οι άξονες δύο ομοίων κυλίνδρων K_1 και K_2 είναι παράλληλοι, βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και σε απόσταση d. Αφήνουμε μία ισοπαχή ομογενή σανίδα Σ πάνω στους κυλίνδρους έτσι ώστε το μέσον της να βρίσκεται πάνω από το μέσον της απόστασης K_1K_2 και με κατάλληλο μηχανισμό βάζουμε τους κυλίνδρους σε περιστροφή, όπως δείχνει το διπλανό σχήμα.

Μετατοπίζουμε λίγο τη σανίδα από τη θέση ισορροπίας της και την αφήνουμε ελεύθερη. Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης που θα εκτελέσει. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης της σανίδας με τους κυλίνδρους είναι μ_κ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g.



Λύση

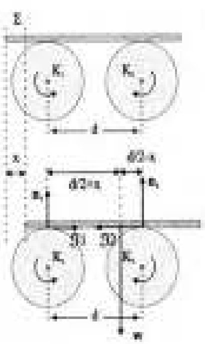
(από το λυσάρι του Υπουργείου)

4.70 Εάν η σανίδα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση θα ισχύουν

$\Sigma F_x = -Dx$

$\Sigma F_y = 0$

$\Sigma \tau = 0$ (ως προς οποιοδήποτε σημείο)



Για μια τυχαία θέση στην οποία η σανίδα είναι μετατοπισμένη κατά x σε σχέση με την αρχική της θέση θα έχουμε

$\Sigma F_x = T_1 - T_2 = \mu_\kappa N_1 - \mu_\kappa N_2$ (1)

$\Sigma F_y = N_1 + N_2 - w = 0$ ή

$N_1 = w - N_2$ (2)

Η συνισταμένη των ροπών ως προς το μέσον της σανίδας είναι

$N_2\left(\frac{d}{2} - x\right) - N_1\left(\frac{d}{2} + x\right) = 0$ και λόγω της (2)

$N_2\left(\frac{d}{2} - x\right) - (w - N_2)\left(\frac{d}{2} + x\right) = 0$

Λύνουμε ως προς N_2 και βρίσκουμε $N_2 = \frac{w\left(\frac{d}{2} + x\right)}{d}$ (3)

Αντικαθιστούμε στην (2) και βρίσκουμε

$N_1 = w - \frac{wd}{2(d-x)}$ ή $N_1 = \frac{w\left(\frac{d}{2} - x\right)}{d}$ (4)

Η (1) λόγω των (3) και (4) γίνεται

$\Sigma F_x = \mu_\kappa \frac{w\left(\frac{d}{2} - x\right)}{d} - \mu_\kappa \frac{w\left(\frac{d}{2} + x\right)}{d} = -\frac{2\mu_\kappa w}{d}x$

$\Sigma F_x = -\frac{2\mu_\kappa mg}{d}x$ της μορφής $\Sigma F_x = -Dx$

όπου $D = \frac{2\mu_\kappa mg}{d}$

Η περίοδος της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$

οπότε τελικά $T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{2\mu_\kappa g}}$

Παρακάμπτω τα τόσα μαθηματικά προβλήματα που έχει η άσκηση και η λύση της και πάμε στο θέμα που μας απασχολεί.

Ερώτηση

Η κίνηση του κέντρου μάζας της σανίδας είναι απλή αρμονική ταλάντωση;

<u>Απάντηση</u>

Σαφώς όχι! Αν ήταν θα έπρεπε η συνισταμένη δύναμη που ελέγχει την κίνηση της σανίδας να ήταν χωροεξαρτώμενη (χρονοανεξάρτητη) συντηρητική δύναμη της μορφής $F_{ολ} = -Dx$

Ερώτηση

Μα αφού είναι. Κοίτα τη λύση του Υπουργείου παραπάνω.
Στην διεύθυνση x όπου γίνεται η κίνηση, η συνισταμένη των δυνάμεων είναι

$$\Sigma F_x = -\frac{2\mu_\kappa mg}{d}x = -Dx \qquad (6)$$

με σταθερά επαναφοράς

$$D = \frac{2\mu_\kappa mg}{d} \qquad (7)$$

<u>Απάντηση</u>

Παρόλο που η μορφή της συνισταμένης είναι $\Sigma F_x = -\frac{2\mu_\kappa mg}{d}x$, η δύναμη αυτή δεν είναι χωροεξαρτώμενη δύναμη, αλλά χρονοεξαρτώμενη.

Η μορφή $\Sigma F_x = -Dx$ την οποία μπορεί να πάρει, και στην οποία καταλήγει το σχολικό βιβλίο, δεν είναι προϊόν της ποιότητας της συνισταμένης δύναμης, αλλά αποτέλεσμα

i. του τρόπου λύσης του συστήματος των εξισώσεων του Νεύτωνα *(δυνάμεων και ροπών, δηλαδή των εξισώσεων 1, 2 και εξίσωση ροπών στο ένθετο του Υπουργείου)* .
Εννοώ ότι λύσαμε την ΣF_x ως προς το x.
Πράγματι

$$\Sigma F_x = T_1 - T_2 = \mu_k n_1 - \mu_k n_2$$

και επειδή $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow n_1 = w - n_2$

και $n_2 = \frac{w}{2} + \frac{w}{d}x$

προκύπτει

$$\Sigma F_x = -\frac{2\mu_\kappa mg}{d}x$$

ii. του γεγονότος ότι στο σύστημα μπλέχτηκε το βάρος w της σανίδας που είναι (καθαρόαιμη) χωροεξαρτώμενη δύναμη

Αλλιώς:

Στις εξισώσεις του συστήματος (λυσάρι) μπλέχτηκε το χωροεξαρτώμενο βάρος w που έφερε στο προσκήνιο (μέσω των συνιστωσών του) το x.

Και εμείς λύσαμε τις τριβές T_1 και T_2 ως προς το x. Έτσι αναγκαστικά μπήκε μέσα στις τριβές το x και τελικά πέρασε στην συνισταμένη ΣF_x που ελέγχει την κίνηση.

Θα μπορούσαμε, για παράδειγμα, στο παραπάνω σύστημα να λύσουμε το w ως προς T_2.
Τι θα σήμαινε αυτό;
Ότι το βάρος έγινε τριβή; Ή μήπως ότι η τριβή έγινε βάρος και άρα συνδέεται με δυναμική ενέργεια;

Ερώτηση

Και αφού η μορφή $\Sigma F_x = -Dx$ δεν αρκεί για να χαρακτηρίσω μια δύναμη χωροεξαρτώμενη και συνεπώς δεν αρκεί για να πω ότι η κίνηση είναι απλή αρμονική ταλάντωση και να τη συνδέσω με δυναμική ενέργεια, τι πρέπει να κάνω;

Απάντηση

Να ελέγξεις αν όντως η δύναμη είναι χωροεξαρτώμενη ή όχι.

Να δεις αν είναι πράγματι χωροεξαρτώμενη και όχι π.χ. προϊόν επίλυσης κάποιου συστήματος

Ερώτηση

Πως θα το κάνω αυτό;

Απάντηση

Όπως είπαμε ήδη από την αρχή αυτής της εργασίας, οι συναρτήσεις που αφορούν τη δύναμη και τη δυναμική ενέργεια θα πρέπει να μένουν ίδιες όταν επιβάλλονται άλλες συνθήκες (π.χ. ακινησία, άλλες αρχικές συνθήκες, άλλες εξωτερικές συνθήκες όπως π.χ. μια κρούση κ.λπ), εξαρτώμενες αποκλειστικά από το «χώρο» και όχι από το χρόνο.

Μπορούμε λοιπόν εδώ να «σταματήσουμε» το χρόνο. Να πάρουμε με το μυαλό μας π.χ. μια φωτογραφία των σωμάτων που εξετάζουμε.

Αν στην άσκηση με τους δύο τροχούς «σταματήσουμε» το χρόνο (αρπάξουμε π.χ. τη σανίδα και τους τροχούς και τους σταματήσουμε σε μια τυχαία θέση), τότε και οι τριβές ολίσθησης T_1 και T_2 καθώς και η συνισταμένη δύναμη ΣF_x αμέσως θα καταργηθούν, θα αλλάξουν δηλαδή αμέσως.

Άρα ούτε οι τριβές T_1 και T_2 ούτε η συνισταμένη ΣF_x είναι χωροεξαρτημένες (χρονοανεξάρτητες) και συνεπώς δεν έχουμε δικαίωμα να μιλάμε για απλή αρμονική ταλάντωση της σανίδας.

Ερώτηση

Και τι πρόβλημα θα είχαμε αν αδιαφορούσαμε για όλα αυτά και λέγαμε ότι έχουμε α.α.τ.;

Απάντηση

Θα είχαμε πρόβλημα συνέπειας στα λόγια μας και σαθρότητα στο συλλογισμό μας ως Φυσικοί.

Να εξηγήσω:

Αν πούμε ότι η κίνηση της σανίδας είναι α.α.τ. οπότε θα δεχτούμε ότι η συνισταμένη δύναμη $\Sigma F_x = -\frac{2\mu_\kappa mg}{d}x = -Dx$ είναι χωροεξαρτώμενη (χρονοανεξάρτητη) δύναμη, τότε θα πρέπει να συνδέσουμε την ΣF_x με δυναμική ενέργεια U μέσω της σχέσης $\Sigma F_x = -\frac{dU}{dx}$ και να μιλήσουμε για διατήρηση ενέργειας της σανίδας.

Τότε όμως θα πρέπει να δεχτούμε ότι και οι τριβές ολίσθησης

$$T_1 = \mu_\kappa\left(\frac{w}{2} - \frac{w}{d}x\right) \qquad T_2 = \mu_\kappa\left(\frac{w}{2} + \frac{w}{d}x\right)$$

συνδέονται με δυναμική ενέργεια και ότι διατηρούν την μηχανική ενέργεια όταν ήδη ξέρουμε ότι με τα έργα τους ένα μέρος της ενέργειας των τροχών το κάνουν εσωτερική ενέργεια της σανίδας. Αυτά δεν είναι πράγματα που αφορούν τις συντηρητικές δυνάμεις.

Και ίσως σε αυτή την άσκηση να μην έχουμε και τίποτε εξωφρενικό μέσα στα πόδια μας οπότε ξεγλιστράμε κάπως από τα αδιέξοδα, αλλά γρήγορα σε άλλη άσκηση, οι συλλογισμοί μας θα καταρρεύσουν και θα οδηγηθούμε σε παραλογισμούς.

Θα πρέπει, όπως είδαμε στο παράδειγμα 3, να δεχτούμε ότι όταν ένα σώμα ολισθαίνει σε επίπεδο με τριβή και σταματά η μηχανική ενέργεια του σώματος διατηρείται.
Θα αρχίσουμε να λέμε κωμικά πράγματα.

Συμπέρασμα

Στην παραπάνω άσκηση το κέντρο μάζας της σανίδας δεν κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

Κυριακή 14 Νοεμβρίου 2010

Θρασύβουλος Κων. Μαχαίρας
Φυσικός