ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2019 - Γ΄ Τάξη

Α΄ Φάση 13/04/2019

ΟΔΗΓΙΕΣ:

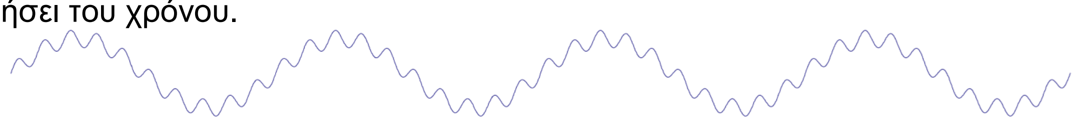
1. Εκτός αν η εκφώνηση ορίζει διαφορετικά, οι απαντήσεις σε *όλα* τα ερωτήματα θα πρέπει να αναγραφούν στο ***Φύλλο Απαντήσεων*** που θα σας δοθεί μαζί με τις εκφωνήσεις.
2. Η επεξεργασία των θεμάτων θα γίνει γραπτώς σε φύλλα Α4 ή σε τετράδιο που θα σας δοθεί. Τα υλικά αυτά θα παραδοθούν στο τέλος της εξέτασης μαζί με το ***Φύλλο Απαντήσεων***.
3. Όπου ζητούνται γραφήματα θα σχεδιαστούν στους ειδικούς χώρους του ***Φύλλου Απαντήσεων***.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1Ο ΘΕΜΑ

Α.1. Λέμε ότι από τη διατήρηση της στροφορμής προκύπτει ότι ο χρόνος μιας πλήρους περιστροφής ενός πλανήτη γύρω από τον εαυτό του, όπως και ο χρόνος περιφοράς του γύρω από τον ήλιο είναι σταθερός. Εξηγήστε σε κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις ποια είναι τα χαρακτηριστικά της βαρυτικής δύναμης που οδηγούν σε αυτά τα συμπεράσματα.

Α.2. Στο σχήμα βλέπουμε την απομάκρυνση ενός σώματος από τη θέση ισορροπίας του συναρτήσει του χρόνου.



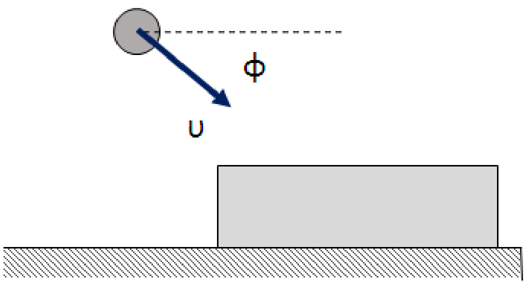
Α.2.1. Θα μπορούσε αυτή η κίνηση να θεωρηθεί σύνθεση ταλαντώσεων;

Α.2.2. Αν ναι, τότε τί μορφή θα έπρεπε να έχουν οι ταλαντώσεις που συντίθενται, ώστε να δώσουν ένα τέτοιο αποτέλεσμα;

Α.3. Σε κάποιους αστέρες στο σύμπαν η ακτίνα μεταβάλλεται σημαντικά με το χρόνο λόγω πυρηνικών αντιδράσεων που συμβαίνουν στο εσωτερικό τους. Ξέρουμε ότι με τη χρήση της διατήρησης της στροφορμής, μπορούμε να υπολογίσουμε τη νέα περίοδο του αστέρα συναρτήσει της αρχικής του περιόδου, πριν μεταβληθεί η ακτίνα του. Ισχύει όμως: $T' \neq T \Rightarrow a_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \neq 0 \Rightarrow \Sigma\tau = I a_\gamma \neq 0$. Είναι λοιπόν η συνισταμένη εξωτερική ροπή μηδέν; Αν όχι, πώς εμείς θεωρούμε ότι η στροφορμή διατηρείται για να υπολογίσουμε τη νέα περίοδο;

2Ο ΘΕΜΑ

Σώμα μάζας M ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο, με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής $\mu_s = \mu = 0{,}6$. Βλήμα μάζας $m = 10g$ κινείται διαγωνίως προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 40\ m/s$, η διεύθυνση της οποίας σχηματίζει γωνία $\varphi = 60^o$ με την οριζόντια διεύθυνση.



Το βλήμα σφηνώνεται στο σώμα, χωρίς αυτό να αναπηδήσει. Η κρούση έχει μετρήσιμη χρονική διάρκεια Δt.

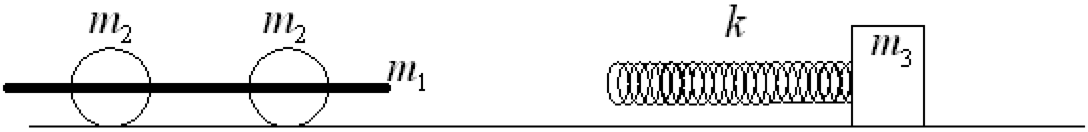
Β.1. Στο διαθέσιμο χώρο του φύλλου απαντήσεων να σχεδιάσετε ποιοτικά το διάγραμμα της κάθετης αντίδρασης από το δάπεδο, από κάποια στιγμή πριν την έναρξη της κρούσης, μέχρι κάποια άλλη στιγμή που αυτή έχει ολοκληρωθεί.

Β.2. Να ερμηνεύσετε διαστατικά (δηλ. με βάση τις μονάδες των φυσικών μεγεθών) τι εκφράζει το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση και τον άξονα του χρόνου.

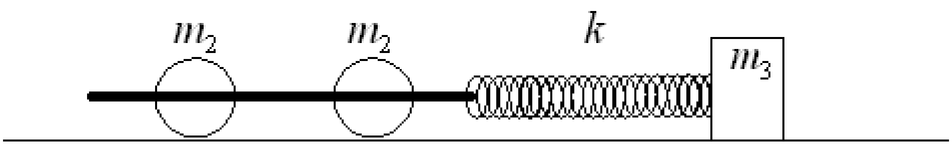
Β.3. Να σχεδιάσετε ποιοτικά το διάγραμμα της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο σύστημα των δύο σωμάτων κατά τον άξονα y΄y, από κάποια στιγμή πριν την κρούση, μέχρι κάποια άλλη στιγμή που αυτή ολοκληρώνεται.
Β.4. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή του εμβαδού που περικλείεται από τη γραφική παράσταση του ερωτήματος Β.3. και τον άξονα του χρόνου.
Β.5. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια $|\Delta K|$ που κατά την κρούση μετατρέπεται σε θερμική. Για τους υπολογισμούς στο ερώτημα αυτό, να θεωρήσετε το βάρος αμελητέο σε σχέση με την κάθετη αντίδραση N.

3^{Ο} ΘΕΜΑ

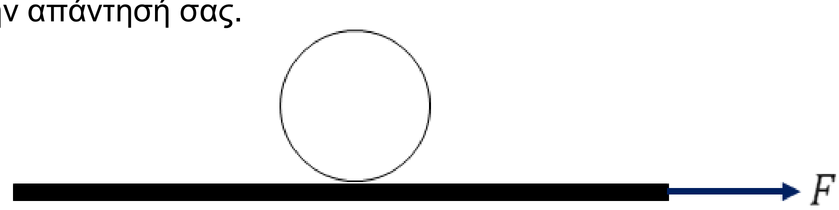
Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε ένα αυτοσχέδιο πατίνι. Αποτελείται από μια αμελητέου πάχους ομογενή σανίδα μάζας $m_1 = 2Kg$ και δύο «βαράκια» που παίζουν το ρόλο των τροχών, καθένα με μάζα $m_2 = 2Kg$ και ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα συμμετρίας τους $I = \frac{1}{2} m_2 R^2$. Η σανίδα είναι οριζόντια και διέρχεται από τα κέντρα μάζας των τροχών. Η σανίδα και οι τροχοί συνιστούν ενιαίο σύστημα, το κέντρο μάζας του οποίου βρίσκεται στο μέσο της σανίδας. Το σύστημα κινείται με σταθερή ταχύτητα σε ευθεία που συμπίπτει με τον άξονα οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς $k = 800 N/m$. Το πλάτος της σανίδας είναι επαρκές ώστε μετά την πρόσκρουσή της στο ελατήριο να το αναγκάσει να συσπειρωθεί. Τη στιγμή που το σύστημα προσκρούει στο άκρο του ελατηρίου η ταχύτητά του είναι $1 m/s$. Στο οριζόντιο δάπεδο υπάρχει επαρκής τριβή, ώστε οι τροχοί να κάνουν κύλιση (χωρίς ολίσθηση) όταν το σύστημα προσπέσει στο ελατήριο. Το ελατήριο είναι στερεωμένο σε σώμα μάζας $m_3 = 6Kg$ το οποίο είναι κολλημένο στο δάπεδο. Δίνεται $g = 10 m/s^2$.



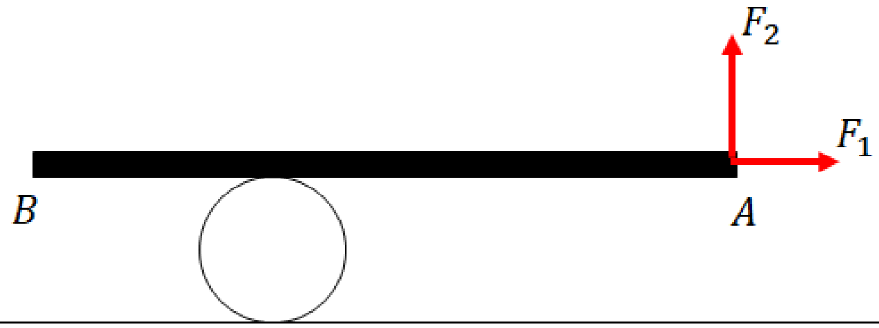
Γ.1. Να βρεθεί η μέγιστη συσπείρωση A του ελατηρίου.
Γ.2. Αν το σύστημα κολλά στο ελατήριο, να αποδειχθεί ότι η σανίδα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να βρεθεί η περίοδός της T.
Γ.3. Έχοντας καθαρίσει τα υπολείμματα κόλλας από τη βάση του σώματος m_3, μεταφέρουμε το σύστημα πατινιού – ελατηρίου – σώματος m_3 σε άλλο δάπεδο, χωρίς τριβή. Επιμηκύνουμε το ελατήριο κατά Δl_0 και αφήνουμε ταυτόχρονα το πατίνι και το σώμα m_3 ελεύθερα να κινηθούν. Να αποδείξετε ότι το πατίνι θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδό της T_2.



Γ.4. Αποσυνδέουμε το πατίνι από το ελατήριο, αποσυνδέουμε και τους τροχούς από τη σανίδα, τοποθετούμε τη σανίδα σε λείο οριζόντιο δάπεδο και στο μέσο της τοποθετούμε τον έναν τροχό, με το επίπεδό του παράλληλα στο μήκος της σανίδας (βλ. σχ.). Μεταξύ σανίδας και τροχού υπάρχει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0{,}29$. Ασκούμε στη σανίδα οριζόντια δύναμη, κάθετη στον άξονα συμμετρίας του τροχού, με μέτρο $F = 20N$. Ποια θα είναι η επιτάχυνση α_1της σανίδας και ποια η επιτάχυνση $\alpha_{c.m.}$του κέντρου μάζας του τροχού; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Γ.5. Στη συνέχεια τοποθετούμε το δίσκο σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο και τη σανίδα πάνω σε αυτόν (βλ. σχ.). Ενώ το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας ασκούμε στο άκρο Α της σανίδας σταθερή οριζόντια δύναμη F_1 και κατακόρυφη δύναμη F_2, το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται κατά τρόπο ώστε η σανίδα να διατηρεί τον οριζόντιο προσανατολισμό της. Σε σχέση τόσο με το έδαφος όσο και με τη σανίδα, ο δίσκος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Θεωρώντας ότι η αρχή του συστήματος αναφοράς ταυτίζεται με τη θέση του κέντρου μάζας της σανίδας όσο το σύστημα ηρεμεί, να εκφράσετε το μέτρο της δύναμης F_2 σε συνάρτηση με τη μετατόπιση x του κέντρου μάζας της σανίδας.



ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Ένα σώμα που αφήνεται να κινηθεί μέσα σε ρευστό υπό την επίδραση της βαρύτητας, με την προϋπόθεση ότι η κίνησή του διαρκεί επαρκή χρόνο, θα αποκτήσει μια τελική σταθερή ταχύτητα που καλείται οριακή, καθώς, εκτός από την άνωση A, δέχεται και μια δύναμη F, που οφείλεται στην εσωτερική τριβή (ιξώδες) του ρευστού.

Για σώμα σφαιρικού σχήματος, ακτίνας r, κινούμενο με ταχύτητα υ, η δύναμη από το ρευστό δίνεται από τη σχέση:

$$F = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot \upsilon \quad (1)$$

όπου η ο συντελεστής ιξώδους του ρευστού.

Για κυλινδρικό σώμα ακτίνας βάσης r η προηγούμενη σχέση γενικεύεται στη μορφή:

$$F = 6\pi \cdot k \cdot \eta \cdot r^m \cdot \upsilon \quad (2)$$

όπου k και m αριθμοί, η τιμή των οποίων εξαρτάται από τις αναλογίες των διαστάσεων του κυλίνδρου τον προσανατολισμό του κατά την κίνησή του μέσα στο ρευστό.

Δ.1. Αν συμβολίσουμε με ρ την πυκνότητα του σώματος και με ρ' την πυκνότητα του ρευστού, αποδείξτε ότι η οριακή ταχύτητα $\upsilon_{o\rho,\sigma\varphi}$ για σώμα σφαιρικού σχήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_{o\rho,\sigma\varphi} = C_{\sigma\varphi}(\rho - \rho')r^2 \quad (3)$$

όπου $C_{\sigma\varphi}$ μία σταθερά, ενώ για σώμα κυλινδρικού σχήματος,του οποίου το ύψοςh ισούται με τη διάμετρο της βάσης, η οριακή ταχύτητα $\upsilon_{o\rho,\kappa\upsilon\lambda}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_{o\rho,\kappa\upsilon\lambda} = C_{\kappa\upsilon\lambda}(\rho - \rho')r^{3-m} \quad (4)$$

όπου $C_{\kappa\upsilon\lambda}$ μία άλλη σταθερά.

Δ.2. Εκφράστε τις σταθερές $C_{\sigma\varphi}$ και $C_{\kappa\upsilon\lambda}$ σε συνάρτηση άλλων σταθερών ποσοτήτων του πειράματος.

Δ.3[1]. Μια ομάδα μαθητών θέλησε να μετρήσει πειραματικά τον συντελεστή ιξώδους $\eta_{\gamma\lambda}$της γλυκερίνης.

Για το σκοπό αυτό προμηθεύτηκαν ομογενή σώματα σφαιρικού σχήματος από αλουμίνιο ($\rho = 2{,}7\ g/cm^3$), με ποικίλες τιμές ακτίνας.

Οι σφαίρες αφέθηκαν διαδοχικά να κινηθούν υπό την επίδραση της βαρύτητας μέσα σε γυάλινο σωλήνα κατάλληλης διαμέτρου και επαρκούς ύψους (ώστε να εξασφαλίζεται η επίτευξη της $\upsilon_{o\rho}$), γεμισμένο με γλυκερίνη. Χρησιμοποιώντας φωτοπύλες, για να μετρήσουν τη μέση ταχύτητα διέλευσης των σφαιρών από αυτές, αρχικά προσδιόρισαν για κάθε σφαίρα την τιμή του βάθους$h_{o\rho}$πέραν του οποίου αυτή αποκτούσε σταθερή ταχύτητα. Κατόπιν, για κάθε σφαίρα τοποθέτησαν μία φωτοπύλη σε κάποια θέση χαμηλότερα από το αντίστοιχο $h_{o\rho}$ και μέτρησαν την οριακή ταχύτητά της. Οι μετρήσεις τους δίνονται στον επόμενο πίνακα:

$r\ (mm)$	4	6	8	10	12
$\upsilon_{o\rho}\ (m/s)$	0,058	0,130	0,237	0,373	0,532

Στον πίνακα που θα βρείτε στο φύλλο απαντήσεων, συμπληρώστε τις τιμές του συντελεστή $C_{\sigma\varphi}$ και προσδιορίστε τη μέση τιμή του. Από αυτή υπολογίστε το $\eta_{\gamma\lambda}$.

Δ.4. Στη συνέχεια, οι μαθητές προσδιόρισαν πειραματικά τις τιμές των συντελεστών k και m για κύλινδρο που βυθίζεται σε γλυκερίνη.

Για το σκοπό αυτό προμηθεύτηκαν ομογενή σώματα κυλινδρικού σχήματος από αλουμίνιο,

[1] Η βαθμολόγηση των ερωτημάτων (Δ.3. και Δ.5.) δεδομένης της καθυστερημένης άφιξης της τιμής της $\rho_{\gamma\lambda}$ σε ορισμένα εξεταστικά κέντρα του διαγωνισμού θα γίνει με ιδιαίτερη προσοχή, αφού ληφθούν υπόψη όλες οι παράμετροι, ώστε αυτά τα ερωτήματα να μην επηρεάσουν καθοριστικά την τελική κατάταξη των διαγωνιζόμενων.

με ποικίλες τιμές ακτίνας βάσης rκαι ύψος h ίσο με τη διάμετρο της βάσης.

Με ανάλογη πειραματική διαδικασία, κατέληξαν στις ακόλουθες μετρήσεις:

$r\ (mm)$	4	6	8	10	12
$\upsilon_{o\rho}\ (m/s)$	0,541	1,062	1,715	2,496	3,381

Οι μαθητές φρόντισαν σε κάθε επανάληψη του πειράματος ο άξονας των κυλίνδρων να παραμένει οριζόντιος. Επίσης, το δοχείο που χρησιμοποίησαν είχε αρκετά μεγάλο ύψος ώστε να εξασφαλίζεται η επίτευξη της $\upsilon_{o\rho}$.

Προκειμένου να προσδιορίσουν τις τιμές των k και m θυμήθηκαν τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων (Μ.Ε.Τ.) η οποία οδηγεί σε προσδιορισμό δύο σταθερών. Σκέφτηκαν όμως ότι αυτή εφαρμόζεται στην περίπτωση όπου υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των πειραματικά προσδιοριζόμενων φυσικών μεγεθών, κάτι που δεν ισχύει στην περίπτωση της σχέσης (4). Η καθηγήτριά τους τούς συμβούλεψε να λογαριθμήσουν τη σχέση (4), ώστε να καταλήξουν σε γραμμική εξάρτηση. Στο φύλλο απαντήσεων γράψτε τη μορφή της (4) μετά τη λογαρίθμηση.

Δ.5[1]. Συμπληρώστε τον πίνακα που θα βρείτε στο φύλλο απαντήσεων και εφαρμόστε τη Μ.Ε.Τ. για να βρείτε τις τιμές των k και m για κύλινδρο.Για το συντελεστή ιξώδους της γλυκερίνης χρησιμοποιήστε την τιμή που προσδιορίσατε στο ερώτημα Δ.3. Αν δεν καταφέρατε να φτάσετε σε αριθμητικό αποτέλεσμα, χρησιμοποιήστε την τιμή $\eta_{\gamma\lambda} = 0{,}85\frac{N\cdot s}{m^2}$.

Δίνονται: $V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\pi r^3$, $V_{\kappa\upsilon\lambda} = \pi r^2 h$, $g = 9{,}81 m/s^2$, $\rho' = \rho_{\gamma\lambda} = 1.260\ kg/m^3$.
Σημείωση: Για τους υπολογισμούς σας να χρησιμοποιήσετε ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ για τη Μ.Ε.Τ.: Έστω ότι έχουμε μετρήσει N ζεύγη τιμών των φυσικών μεγεθών xκαι y και βρήκαμε τις τιμές x_iκαι y_i, όπου$i = 1,2,3,\ldots, N$. Αν γνωρίζουμε ότι τα μεγέθη xκαι y συνδέονται με τη σχέση $y = a + \beta \cdot x$,μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των συντελεστών a και β, χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \qquad \beta = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

Καλή Επιτυχία

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Όνομα και Επώνυμο: ……………………………………………………………
Όνομα Πατέρα: …………………….. Όνομα Μητέρας: …………………..
Τηλ. Οικίας: ………………….. Κινητό τηλέφωνο: ………………….….
e-mail: ……………………..………………………………

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1^{Ο} ΘΕΜΑ

Α.1.

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

Α.2.1. ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Α.2.2.…………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………...

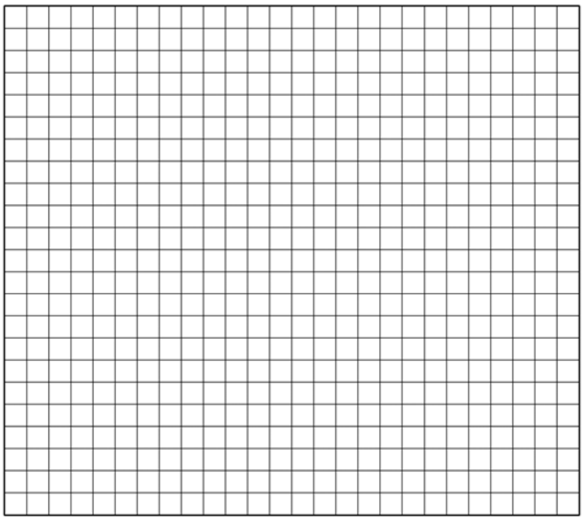
……………………………………………………………………………………...

Α.3.………………………………………………………………………….........

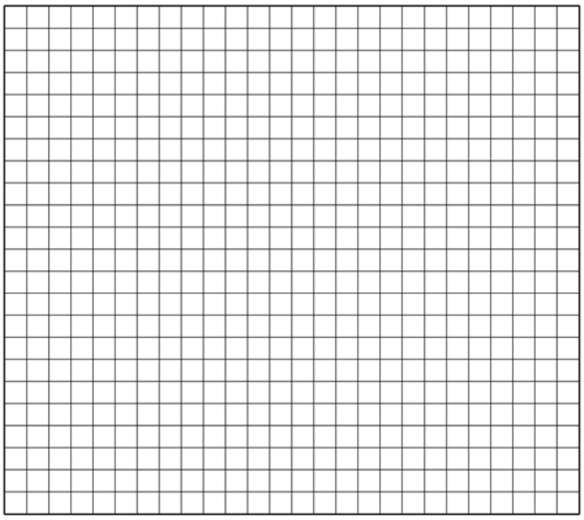
……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

2^{O} ΘΕΜΑ



Σχεδιάστε εδώ το διάγραμμα του ερωτήματος **Β.1.**



Σχεδιάστε εδώ το διάγραμμα του ερωτήματος **Β.3.**

Β.2. Ερμηνεία: ………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………….....

…………………………………………………………………………………………….....

…………………………………………………………………………………………….....

Β.4. Αριθμητική τιμή εμβαδού: ……………..**Β.5.** $|\Delta K| =$…………...

3^{O} ΘΕΜΑ

Γ.1. $A =$ ……………………………..

Γ.2. ………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………….....

…………………………………………………………………………………………….....

…………………………………………………………………………………………….....

…………………………………………………………………………………………….....

…………………………………………………………………………………………………….....

…………………………………………………………………………………………………….....

$T =$………………

Γ.3. ……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………….....

…………………………………………………………………………………………………….....

…………………………………………………………………………………………………….....

…………………………………………………………………………………………………….....

…………………………………………………………………………………………………….....

…………………………………………………………………………………………………….....

$T_2 =$…………………..

Γ.4. $\alpha_1 =$……………….. $\alpha_{cm} =$………………. **Γ.5.** $F_2 = f(x) =$……………………………

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Δ.1. Απόδειξη:

…………………………………………………………………………………………………….....

…………………………………………………………………………………………………….....

…………………………………………………………………………………………………….....

…………………………………………………………………………………………………….....

…………………………………………………………………………………………………….....

Δ.2. $C_{\sigma\varphi} =$……………………………… $C_{\kappa\upsilon\lambda} =$ ………………………………

Δ.3. Συμπληρώστε τον πίνακα::

$r\ (m)$	$\upsilon_{o\rho}\ (m/s)$	$C_{\sigma\varphi}\left(\frac{m^2}{kg\cdot s}\right)$
0,004	0,058	
0,006	0,130	
0,008	0,237	
0,010	0,373	
0,012	0,532	

$\overline{C_{\sigma\varphi}}$ =……………………. $\eta_{\gamma\lambda}$ =…………………

Δ.4. Με λογαρίθμηση η σχέση (4) γράφεται:

……………………………………………………………………………………………….....

Δ.5. Συμπληρώνουμε τον πίνακα των μετρήσεων με τους πρόσθετους υπολογισμούς:

r	$\upsilon_{o\rho}$	$\log r \equiv x$	$log\upsilon_{o\rho,\kappa\upsilon\lambda} \equiv y$	x^2	y^2	$x\cdot y$
0,004	0,541					
0,006	1,062					
0,008	1,715					
0,010	2,496					
0,012	3,381					
Αθροίσματα						

Εφαρμόστε τη Μ.Ε.Τ. και βρείτε τις τιμές των συντελεστών:

m =…………….. k =………………

Συνοπτικές Απαντήσεις

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1^{Ο} ΘΕΜΑ

Α.1. Οι δύο χρόνοι παραμένουν σταθεροί επειδή η στροφορμή ενός πλανήτη λόγω της περιστροφής γύρω από τον άξονά του (ιδιοστροφορμή) και η στροφορμή του πλανήτη λόγω της περιστροφής του γύρω από τον ήλιο παραμένουν σταθερές. Η πρώτη παραμένει σταθερή επειδή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η δύναμη της βαρύτητας ασκείται στο κέντρο μάζας του πλανήτη (έστω και κατά προσέγγιση επειδή το πεδίο δεν είναι ομογενές και η πυκνότητα του πλανήτη δεν είναι σταθερή σε όλο τον όγκο του) και η δεύτερη παραμένει σταθερή επειδή η δύναμη από τον ήλιο δείχνει προς ένα σταθερό σημείο, το κέντρο του ήλιου (δηλαδή είναι όπως λέμε κεντρική δύναμη).

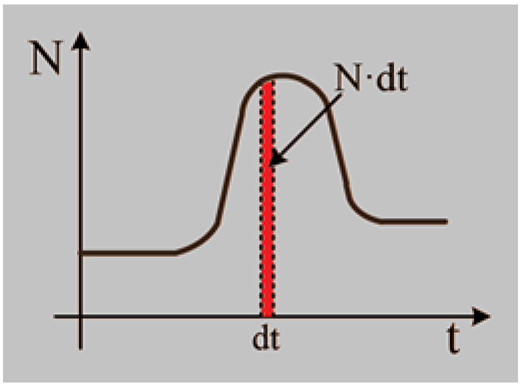
Α.2.1 .Ναι.

Α.2.2. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο ταλαντώσεις, μία με μεγάλο πλάτος και μεγάλη περίοδο, και μία με μικρό πλάτος (κλάσμα του προηγούμενου) και μικρή περίοδο.

Α.3. Ο τύπος $\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ισχύει μόνο για σταθερή ροπή αδράνειας, όταν αλλάζει η ακτίνα του πλανήτη, δηλ. η κατανομή της μάζας του ως προς τον άξονα περιστροφής, ο τύπος δεν ισχύει. Αντ΄ αυτού πρέπει να χρησιμοποιηθεί η γενικότερη μορφή $\Sigma\tau = dL/dt$

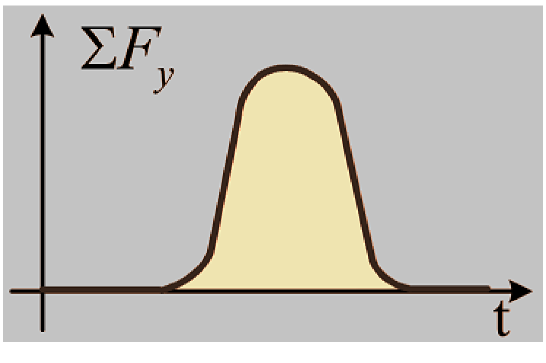
2^{Ο}ΘΕΜΑ

Β.1. Το διάγραμμα της κάθετης αντίδρασης από το δάπεδο, απόκάποια στιγμήπριν την κρούση, μέχρι τη στιγμή που η κρούση ολοκληρώνεται, έχει την ποιοτική μορφή του διπλανού σχήματος. Η υψομετρική διαφορά μεταξύ αριστερού και δεξιού οριζόντιου τμήματος οφείλεται στο μεγαλύτερο βάρος που έχει το συσσωμάτωμα σε σύγκριση με το σώμα μάζας M.



Β.2. Ένα στοιχειώδες εμβαδό στο διάγραμμα $N = f(t)$ εκφράζει ό,τι και το γινόμενο $N \cdot dt$ δηλαδή μεταβολή ορμής dp.

Β.3. Το διάγραμμα της συνισταμένης δύναμης στον άξονα y΄y από κάποια στιγμή πριν την κρούση, μέχρι μιαάλλη στιγμή μετά την ολοκλήρωσή της έχει την ποιοτική μορφή του διπλανού σχήματος.



Β.4. Και σε αυτό το διάγραμμα το στοιχειώδες εμβαδό εκφράζει μεταβολή ορμής στον άξονα y΄y,η οποία οφείλεται στη συνισταμένη δύναμη στον κατακόρυφο άξονα.

Αθροίζοντας τα στοιχειώδη εμβαδά, παίρνουμε το ολικό εμβαδό το οποίο αριθμητικά είναι ίσο με τη μεταβολή ορμής του συστήματος στον κατακόρυφο άξονα,Δp_y :

$$\Delta p_y = m \cdot \upsilon \cdot \eta\mu 60^o \Rightarrow \Delta p_y = 10^{-2} kg \cdot 40\frac{m}{s} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta p_y = 0{,}2\sqrt{3}\,\frac{kg \cdot m}{s}$$

Β.5. Στη διάρκεια της κρούσης, η μόνη εξωτερική δύναμη στο σύστημα σώμα M-βλήμα m, στον οριζόντιο άξονα x΄x, είναι η τριβή. Εφαρμόζοντας τη γενικευμένη μορφή του 2ου Νόμου Νεύτωνα στον οριζόντιο άξονα έχουμε:

$$\Sigma F_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} \Rightarrow -T = \frac{(M+m)\upsilon_k - m\upsilon\sigma\upsilon\nu 60^o}{\Delta t} \Rightarrow -\mu N \Delta t = (M+m)\upsilon_k - m\upsilon\sigma\upsilon\nu 60^o \,(1)$$

Θεωρώντας το βάρος αμελητέο σε σχέση με την κάθετη αντίδραση N μπορούμε να δεχτούμε πως η μεταβολή ορμής στον άξονα y΄y οφείλεται στην κάθετη αντίδραση N, δηλαδή

$$\Delta p_y = N \cdot \Delta t = m \cdot \upsilon \cdot \eta\mu 60^o$$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$(M+m)\upsilon_\kappa = m \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu 60^o - \mu \cdot N \cdot \Delta t \Rightarrow (M+m)\upsilon_\kappa = m \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu 60^o - \mu \cdot m \cdot \upsilon \cdot \eta\mu 60^o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (M+m)\upsilon_\kappa = m \cdot \upsilon \cdot (\sigma\upsilon\nu 60^o - \mu \cdot \eta\mu 60^o) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_\kappa = \frac{m \cdot \upsilon}{M+m} \cdot (\sigma\upsilon\nu 60^o - \mu \cdot \eta\mu 60^o)$$

Όμως $\sigma\upsilon\nu 60^o - \mu \cdot \eta\mu 60^o = \frac{1}{2} - 0{,}6\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, οπότε το συσσωμάτωμα δεν θα ολισθήσει στο οριζόντιο δάπεδο, αλλά θα μείνει ακίνητο. Συνεπώς η απώλεια κινητικής ενέργειας είναι ίση με την αρχική κινητική ενέργεια του βλήματος:

$$|\Delta K| = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow |\Delta K| = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 16 \cdot 10^2 J \Rightarrow |\Delta K| = 8J$$

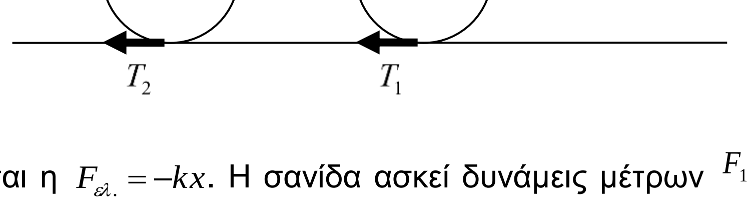
3Ο ΘΕΜΑ

Γ.1. Διατήρηση μηχανικής ενέργειας πριν το σύστημα προσπέσει στο ελατήριο και στη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου:

$$E_{\mu.\alpha\rho\chi.} = E_{\mu.\tau\varepsilon\lambda.} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + 2\frac{1}{2}m_2\upsilon^2 + 2\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m_1+3m_2}{k}}\upsilon$$

$$\Rightarrow A = 0{,}1m$$

Γ.2. Έστω ότι το ελατήριο επιμηκύνεται σε μια τυχαία θέση x.



Στη σανίδα ασκείται η $F_{\varepsilon\lambda.} = -kx$. Η σανίδα ασκεί δυνάμεις μέτρων F_1 και F_2 στα κέντρα μάζας των τροχών, και αντίστοιχα οι τροχοί ασκούν αντιδράσεις με μέτρα $F_1' = F_1$ και $F_2' = F_2$. Για τις κινήσεις των σωμάτων ισχύει:

$F_{\varepsilon\lambda.} - F_1' - F_2' = m_1 a$ (1α)

$F_1 - T_1 = m_2 a$ (1β)

$F_2 - T_2 = m_2 a$ (1γ)

$T_1 R = \frac{1}{2} m_2 R^2 \frac{a}{R}$ (1δ)

$T_2 R = \frac{1}{2} m_2 R^2 \frac{a}{R}$ (1ε)

Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη, προκύπτει:

$$a = \frac{F_{\varepsilon\lambda.}}{m_1 + 3m_2} \Rightarrow \Sigma F_{\sigma\alpha\nu\acute{\iota}\delta\alpha} = m_1 a = \frac{-k m_1 x}{m_1 + 3m_2} \Rightarrow D = \frac{k m_1}{m_1 + 3m_2}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + 3m_2}{k}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} s$$

Γ.3. Για να επιμηκυνθεί το ελατήριο κατά Δl_0, σημαίνει ότι το κάθε σώμα έχει μετατοπιστεί κατά $x = \Delta l_0 / 2$ από το κέντρο μάζας του συστήματος ελατήριο – πατίνι και δέχεται δύναμη από το ελατήριο $-k\Delta l_0 = -k2x$, επομένως εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά $D = 2k$.

Άρα $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+2m_2}{D}} \Rightarrow T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+2m_2}{2k}} \Rightarrow T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{6}{2\cdot 800}} s \Rightarrow$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{\pi}{10}\sqrt{\frac{3}{2}} s$$

Γ.4.

$a_1 = \frac{F - T}{m_1}$

$a_{c.m.} = \frac{T}{m_2}$.

$R a_\gamma = \frac{2T}{m_2}$

Αν θέλουμε το κατώτερο σημείο του τροχού να έχει την ίδια ταχύτητα και επιτάχυνση με τη σανίδα πρέπει:

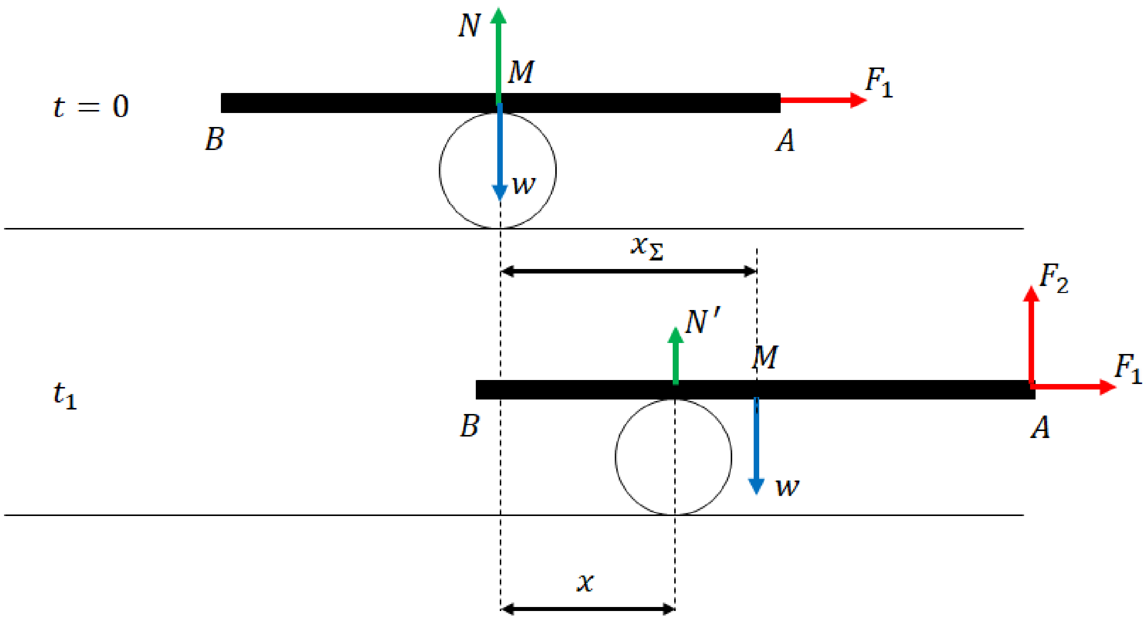
$a_{c.m.} + R a_\gamma = a_1 \Rightarrow T = 5N \Rightarrow \mu_{\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\varsigma} = 0{,}25$.

Ο συντελεστής τριβής που δίνεται στην εκφώνηση είναι μεγαλύτερος, άρα σωστά υποθέσαμε ότι το κατώτερο σημείο δεν ολισθαίνει ως προς τη σανίδα. Τελικά λοιπόν:

$$a_1 = 7{,}5 m/s^2$$

$$a_{c.m.} = 2{,}5 m/s^2.$$

Γ.5. Έστω ότι τη στιγμή t_1 το κέντρο μάζας Μ της σανίδας έχει μετατοπιστεί κατά x_Σ, ενώ η μετατόπιση του δίσκου είναι x (βλ. σχ.).



Για τη σανίδα ισχύει $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N' + F_2 - w \Rightarrow N' + F_2 = w \Rightarrow N' = w - F_2$.

Επίσης ισχύει $\Sigma\tau^{(M)} = 0 \Rightarrow F_2\frac{l}{2} - N'(x_\Sigma - x) = 0 \Rightarrow F_2\frac{l}{2} = N'(x_\Sigma - x) \Rightarrow F_2 l = 2N'(x_\Sigma - x)$.
Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του ανώτερου σημείου της περιφέρειας τροχού, ο οποίος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισούται με $2\upsilon_{c.m.}$. Άρα $x_\Sigma = 2x$.
Συνδυάζοντας τις τρεις σχέσεις έχουμε:`

$$F_2 l = 2(w - F_2)(2x - x) \Rightarrow F_2 l = 2x(w - F_2) \Rightarrow F_2 l = 2w\cdot x - 2F_2 x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_2 l + 2F_2 x = 2w\cdot x \Rightarrow F_2(l + 2x) = 2w\cdot x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_2 = \frac{2w\cdot x}{l + 2x}$$

Από το αποτέλεσμα προκύπτει ότι τη στιγμή $t = 0$, όπου $x = 0$, η δύναμη $F_2 = 0$, όπως ορθώς απεικονίζεται στο πρώτο από τα ανωτέρω στιγμιότυπα, αφού το βάρος της σανίδας στηρίζεται εξ ολοκλήρου από την αντίδραση N του δίσκου.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Δ.1. Όταν το σώμα κινείται με την οριακή του ταχύτητα ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow w - A - F = 0 \Rightarrow w - A = F \quad (5)$$

Για την περίπτωση της σφαίρας έχουμε:

$$mg - \rho' gV = 6\pi\cdot\eta\cdot r\cdot\upsilon_{op,\sigma\varphi} \Rightarrow \rho V g - \rho' gV = 6\pi\cdot\eta\cdot r\cdot\upsilon_{op,\sigma\varphi} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow gV(\rho - \rho') = 6\pi\cdot\eta\cdot r\cdot\upsilon_{op,\sigma\varphi} \Rightarrow \upsilon_{op,\sigma\varphi} = \frac{gV(\rho - \rho')}{6\pi\cdot\eta\cdot r} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \upsilon_{op,\sigma\varphi} = \frac{g\frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho')}{6\pi\cdot\eta\cdot r} \Rightarrow \upsilon_{op,\sigma\varphi} = \frac{2}{9}\frac{gr^2(\rho - \rho')}{\eta} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \upsilon_{op,\sigma\varphi} = \frac{2g}{9\eta}(\rho - \rho')r^2 \quad (6)$$

που είναι η ζητούμενη σχέση (3), αφού για συγκεκριμένο υγρό, σε συγκεκριμένη τοποθεσία, η ποσότητα $\frac{2g}{9\eta}$ είναι σταθερή.

Αντίστοιχα, για τον κύλινδρο, η σχέση (5) γράφεται:

$$mg - \rho' gV = 6\pi \cdot k \cdot \eta \cdot r^m \cdot \upsilon_{o\rho,\kappa\upsilon\lambda} \Rightarrow \rho V g - \rho' gV = 6\pi \cdot k \cdot \eta \cdot r^m \cdot \upsilon_{o\rho,\kappa\upsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow gV(\rho - \rho') = 6\pi \cdot k \cdot \eta \cdot r^m \cdot \upsilon_{o\rho,\kappa\upsilon\lambda} \Rightarrow \upsilon_{o\rho,\kappa\upsilon\lambda} = \frac{gV(\rho - \rho')}{6\pi k \eta r^m}$$

$$\Rightarrow \upsilon_{o\rho,\kappa\upsilon\lambda} = \frac{g\pi r^2 h(\rho - \rho')}{6\pi \cdot k \cdot \eta \cdot r^m}$$

Όμως το ύψος h του κυλίνδρου ισούται με τη διάμετρο της βάσης του $2r$, άρα

$$\upsilon_{o\rho,\kappa\upsilon\lambda} = \frac{2g\pi r^3(\rho - \rho')}{6\pi \cdot k \cdot \eta \cdot r^m} \Rightarrow \upsilon_{o\rho,\kappa\upsilon\lambda} = \frac{g r^{3-m}(\rho - \rho')}{3k \cdot \eta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_{o\rho,\kappa\upsilon\lambda} = \frac{g}{3k\cdot\eta} r^{3-m}(\rho - \rho') \quad (6)$$

που είναι η ζητούμενη σχέση (4), αφού για συγκεκριμένο σώμα, που βυθίζεται σε συγκεκριμένο υγρό, σε συγκεκριμένη τοποθεσία, η ποσότητα $\frac{g}{3k\cdot\eta}$ είναι σταθερή.

Δ.2. Από την προηγούμενη ανάλυση έχουμε:

$$C_{\sigma\varphi} = \frac{2g}{9\eta} \quad (7)$$

και

$$C_{\kappa\upsilon\lambda} = \frac{g}{3k\cdot\eta} \quad (8)$$

Δ.3. Στον πίνακα που ακολουθεί περιλαμβάνονται οι πειραματικές μετρήσεις των μαθητών και οι προκύπτουσες τιμές του συντελεστή $C_{\sigma\varphi}$:

$r\ (m)$	$\upsilon_{o\rho}\ (m/s)$	$C_{\sigma\varphi}\left(\frac{m^2}{kg\cdot s}\right)$
0,004	0,058	2,517
0,006	0,130	2,508
0,008	0,237	2,572
0,010	0,373	2,590
0,012	0,532	2,566

Από αυτές προκύπτει η μέση τιμή:

$$\overline{C_{\sigma\varphi}} \cong 2{,}551 \frac{m^2}{kg\cdot s}$$

Με βάση την τιμή αυτή υπολογίζουμε τελικά:

$$\eta_{\gamma\lambda} \cong 0{,}86 \frac{N\cdot s}{m^2}$$

Δ.4. Με λογαρίθμηση η σχέση (4) γράφεται:

$$log(\upsilon_{o\rho,\kappa\upsilon\lambda}) = \log[\,C_{\kappa\upsilon\lambda}(\rho-\rho')r^{3-m}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow log(\upsilon_{o\rho,\kappa\upsilon\lambda}) = \log[C_{\kappa\upsilon\lambda}(\rho-\rho')] + \log r^{3-m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow log(\upsilon_{o\rho,\kappa\upsilon\lambda}) = \log[C_{\kappa\upsilon\lambda}(\rho-\rho')] + (3-m)\cdot\log r \quad (9)$$

Θέτοντας $x \equiv \log r$ και $y \equiv log\upsilon_{o\rho,\kappa\upsilon\lambda}$, η σχέση αυτή γράφεται

$$y = \log[C_{\kappa\upsilon\lambda}(\rho-\rho')] + (3-m)\cdot x$$

που είναι πραγματικά γραμμική μεταξύ των $log(\upsilon_{o\rho,\kappa\upsilon\lambda})$ και $\log r$.

Δ.5. Συμπληρώνουμε τον πίνακα των μετρήσεων με τους πρόσθετους υπολογισμούς:

r	$\upsilon_{o\rho}$	$\log r \equiv x$	$log\upsilon_{o\rho,\kappa\upsilon\lambda} \equiv y$	x^2	y^2	$x\cdot y$
0,004	0,541	-2,398	-0,267	5,750	0,071	0,640
0,006	1,062	-2,222	0,026	4,937	0,001	-0,058
0,008	1,715	-2,097	0,234	4,397	0,055	-0,491
0,010	2,496	-2,000	0,397	4,000	0,158	-0,794
0,012	3,381	-1,921	0,529	3,690	0,280	-1,016
Αθροίσματα		-10,638	0,919	22,774	0,565	-1,719

Από τις τιμές αυτές και τους τύπους της Μ.Ε.Τ. υπολογίζουμε:

$$b = 1{,}681 \quad \text{και} \quad a = 3{,}759$$

Από την (9) βλέπουμε ότι $3-m=b$

Άρα

$$m = 1{,}319$$

Επίσης

$$\log[C_{\kappa\upsilon\lambda}(\rho-\rho')] = a \Rightarrow C_{\kappa\upsilon\lambda}(\rho-\rho') = 10^a \Rightarrow C_{\kappa\upsilon\lambda} = \frac{10^a}{\rho-\rho'}$$

Η σχέση αυτή σε συνδυασμό με την (8) δίνει:

$$\frac{g}{3k\eta} = \frac{10^a}{\rho-\rho'} \Rightarrow k = \frac{g(\rho-\rho')}{3\eta\cdot 10^a}$$

Αντικαθιστώντας, καταλήγουμε:

$$k = 0{,}965$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για ένα κύλινδρο που πέφτει με τον άξονα συμμετρίας του οριζόντιο η βιβλιογραφία αναφέρει $m = 1{,}33$ και $k = 1$..