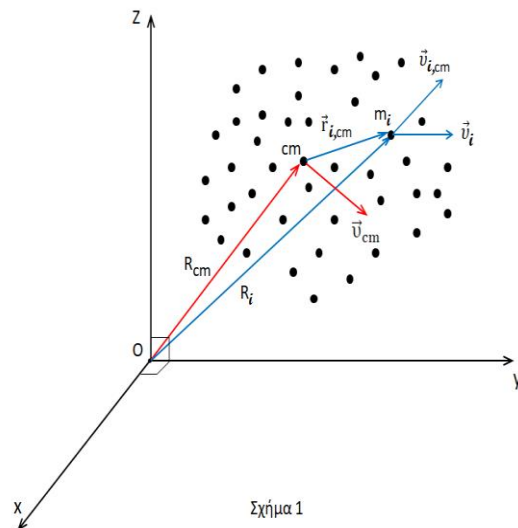


ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΥΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

Όταν κάποιοι φοιτητές του φυσικού τμήματος ρωτούσαν τον καθηγητή της κβαντομηχανικής αείμνηστο, Μιχάλη Γρυπαίο, «γιατί να διδασκόμαστε τόσο προωθημένα θέματα κβαντομηχανικής σχετικότητας και άλλων κλάδων της φυσικής από τη στιγμή που η μεγάλη πλειοψηφία των αποφοίτων του τμήματος διδάσκουν στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση» αυτός έλεγε: «Για να έχεις επάρκεια ως διδάσκων θα πρέπει οι γνώσεις σου να είναι δεκαπλάσιες αυτών που καλείσαι να διδάξεις»! Από την εμπειρία μου παρατηρώ ότι μεγάλος αριθμός των συναδέλφων τηρεί αυτή τη παρακαταθήκη!

Έστω τρισσορθογώνιο σύστημα αναφοράς $Oxyz$, ένα σύστημα n υλικών σημείων, cm το κέντρο μάζας του και $\vec{R}_{cm}$ το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας. Το $\vec{R}_i$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός τυχαίου υλικού σημείου μάζας m_i και $\vec{v}_i$ η ταχύτητά του ως προς αυτό το σύστημα αναφοράς (απόλυτη ταχύτητα). Αντίστοιχα $\vec{r}_{i,cm}$ και $\vec{v}_{i,cm}$ το διάνυσμα θέσης και η ταχύτητά (σχετική ταχύτητα) του τυχαίου υλικού σημείου ως προς το cm (σχήμα 1).



Είναι: $\vec{R}_i = \vec{R}_{cm} + \vec{r}_{i,cm}$. Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο, παίρνουμε: $\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{i,cm}$.

Έχουμε:

$$\vec{L}_{συσ}^{(O)} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i^{(O)} = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{R}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{R}_{cm} + \vec{r}_{i,cm}) \times (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_{i,cm}) =$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i \vec{R}_{cm} \times \vec{v}_{cm} + \sum_{i=1}^n m_i \vec{R}_{cm} \times \vec{v}_{i,cm} + \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{i,cm} \times \vec{v}_{cm} + \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{i,cm} \times \vec{v}_{i,cm} \quad \text{ή}$$

$$\vec{L}_{συσ}^{(O)} = (\sum_{i=1}^n m_i) \vec{R}_{cm} \times \vec{v}_{cm} + \vec{R}_{cm} \times (\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{i,cm}) + (\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{i,cm}) \times \vec{v}_{cm} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{i,cm} \times \vec{v}_{i,cm} \quad (1).$$

Όμως εξ ορισμού το διάνυσμα θέσης συστήματος του κέντρου μάζας συστήματος υλικών σημείων ως προς το σύστημα αναφοράς Oxyz είναι : $\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{R}_i}{M}$ (σχ.1).

Το κλάσμα $\frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{i,cm}}{M}$ είναι το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας ως προς το κέντρο μάζας, δηλαδή, είναι το μηδενικό διάνυσμα. Οπότε:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{i,cm} = \vec{0} \quad (i) \quad \text{. Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο, παίρνουμε: } \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{i,cm} = \vec{0} \quad (ii)$$

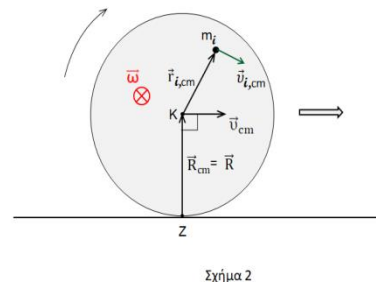
Λόγω των (i) και(ii) η (1) παίρνει τη μορφή:

$$\vec{L}_{\text{συσ}}^{(0)} = M \vec{R}_{cm} \times \vec{v}_{cm} + \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{i,cm} \times \vec{v}_{i,cm} \quad (2).$$

Ο όρος $M \vec{R}_{cm} \times \vec{v}_{cm}$ εκφράζει τη στροφορμή ενός υλικού σημείου μάζας M ίσης με την μάζα του συστήματος που βρίσκεται στη θέση του κέντρου μάζας και κινείται όπως αυτό.

Ο όρος $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{i,cm} \times \vec{v}_{i,cm}$ εκφράζει τη **σχετική στροφορμή** του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας .

Μια εφαρμογή του παραπάνω συμπεράσματος σε κίνηση στερεού: Ομογενής δίσκος μάζας M και ακτίνας R κυλίεται **με ή χωρίς** ολίσθηση, σε οριζόντιο δάπεδο. Να βρεθεί η σχέση που δίνει τη στροφορμή του ως προς το σημείο Z της επαφής του δίσκου με το δάπεδο, μια τυχαία χρονική στιγμή (σχ. 2).



ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Το στερεό μπορεί να θεωρηθεί ως ειδικής μορφής σύστημα υλικών σημείων. Εφαρμόζουμε την (2) για το σημείο επαφής Z του δίσκου με το δάπεδο θέτοντας $\vec{R}_{cm} = \vec{R}$ και $\vec{v}_{i,cm} = \vec{v}_{i,γρ} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{i,cm}$. Τότε:

$\vec{L}^{(Z)} = M \vec{R} \times \vec{v}_{cm} + \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{i,cm} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i,cm})$. Ο όρος $M \vec{R} \times \vec{v}_{cm}$ είναι διάνυσμα που έχει μέτρο $M R v_{cm}$ και είναι κάθετο στο επίπεδο του δίσκου με φορά προς τα «μέσα».

Ο όρος της σχετικής στροφορμής $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{i,cm} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i,cm})$ είναι

διανυσματικό άθροισμα που έχει μέτρο: $(\sum_{i=1}^n m_i r_{i,cm}^2) \omega = I_{cm} \omega$ και είναι κι αυτό κάθετο στο επίπεδο του δίσκου με φορά προς τα «μέσα». Οπότε $\mathbf{L}^{(Z)} = M \mathbf{R}_{cm} \mathbf{v}_{cm} + I_{cm} \omega$, $(I_{cm} = \frac{1}{2} M R^2)$. Ο πρώτος όρος του αθροίσματος ($M \mathbf{R}_{cm} \mathbf{v}_{cm}$) είναι η **τροχιακή στροφορμή** λόγω μεταφοράς και ο δεύτερος ($I_{cm} \omega$) είναι η **ιδιοστροφορμή**, λόγω περιστροφής. Δηλαδή η ανωτέρω ανάλυση οδηγεί στην Αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων ή Αρχή της επαλληλίας στη περίπτωση σύνθετης κίνησης, καθώς η κύλιση είναι σύνθετη κίνηση!