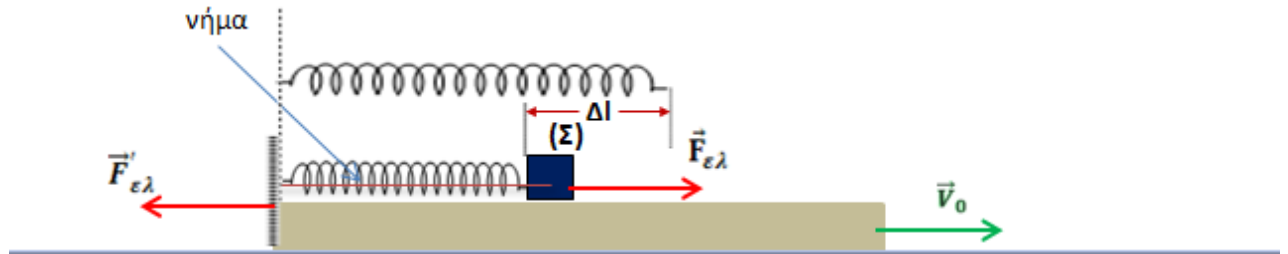


ΤΟ ΘΕΜΑ

Πλατφόρμα μάζας $M=4\text{Kg}$ με λείες επιφάνειες κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο μεταφορικά με ταχύτητα $V_0=10\text{m/s}$. Πάνω της υπάρχει ιδανικό ελατήριο-εκτοξευτήρας σταθεράς $k=2000\text{N/m}$ με το ένα άκρο του στερεωμένο στο αριστερό άκρο της πλατφόρμας και στο δεξιό υπάρχει σώμα (Σ) μάζας $m=1\text{Kg}$ που με τη βοήθεια αβαρούς νήματος συμπιέζει το ελατήριο κατά $\Delta l=0,2\text{m}$. Κάποια στιγμή το νήμα σπάει



A. Υπολογίστε:

A1. τη ταχύτητα της πλατφόρμας και του σώματος (Σ) μετά τη πλήρη αποσυμπίεση του ελατηρίου.

A2. Τη μέση τιμή της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο σώμα (Σ) στη διάρκεια της αποσυμπίεσης και τη χρονική διάρκειά της.

A3. Η αύξηση της κινητικής ενέργειας του σώματος (Σ) είναι σε σχέση με την αρχική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου: α. ίση β. μικρότερη και γ. μεγαλύτερη. Επιλέξτε το σωστό και δικαιολογήστε την απάντησή σας αποδίδοντας φυσική σημασία στα έργα των δυνάμεων στη πλατφόρμα αφενός και στο σώμα (Σ) αφετέρου.

B. Έστω ότι $M \gg m=1\text{kg}$, για παράδειγμα $M=5000\text{kg}$. Με ίδια όλα τα άλλα δεδομένα υπολογίστε:

B1. Τη ταχύτητα του σώματος (Σ) ως προς τη πλατφόρμα και ως προς το δάπεδο τη στιγμή της πλήρους αποσυμπίεσης του ελατηρίου.

B2. Την αύξηση της κινητικής ενέργειας του σώματος (Σ): i) ως προς τη πλατφόρμα και ii) ως προς το δάπεδο. Δώστε μια φυσική ερμηνεία του αποτελέσματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. A1. Ως προς το δάπεδο:

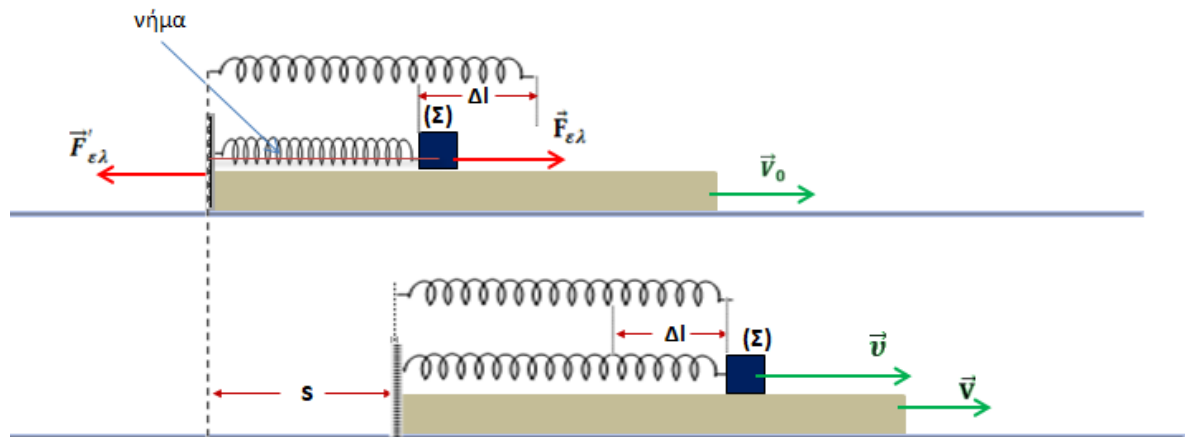
$$\text{Από Α.Δ.Ο.} \rightarrow MV_0 + mV_0 = mv + MV \quad \text{ή} \quad v + 4V = 50 \quad (\alpha)$$

$$\text{Από ΑΔΕ:} \quad K_{\Sigma}^{\alpha\rho\chi} + K_{\pi\lambda}^{\alpha\rho\chi} + U_{\varepsilon\lambda}^{\alpha\rho\chi} = K_{\Sigma}^{\tau\epsilon\lambda} + K_{\pi\lambda}^{\tau\epsilon\lambda} \quad (\beta) \quad \rightarrow$$

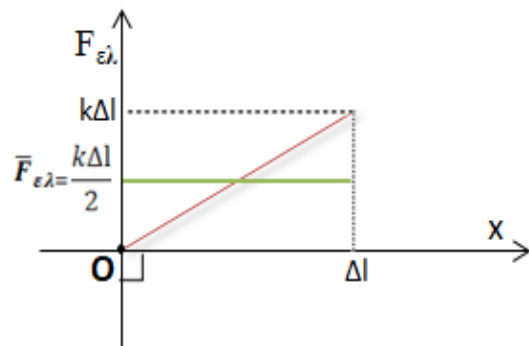
$$\frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \quad (\gamma) \quad \text{ή} \quad mv^2 + MV^2 = mV_0^2 + MV_0^2 + k\Delta l^2$$

$$v^2 + 4V^2 = 580 \quad (\delta).$$

Από τη λύση του συστήματος των (α) και (δ) παίρνουμε: $v=18\text{m/s}$ και $V=8\text{m/s}$.



A2. Αν x η παραμόρφωση του ελατηρίου τότε έχουμε το διάγραμμα του παρακάτω σχήματος από όπου φαίνεται ότι $\bar{F}_{ελ} = \frac{k\Delta l}{2} \rightarrow \bar{F}_{ελ} = 200\text{N}$



Για το σώμα (Σ) στη διάρκεια Δt της εκτόξευσης έχουμε:

$$\bar{F}_{ελ} = \frac{mv - mV_0}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{mv - mV_0}{\bar{F}_{ελ}} \rightarrow \Delta t = 0,04\text{s}.$$

A3. Από (β) $\rightarrow \Delta K_{\Sigma} = U_{ελ} - \Delta K_{\pi\lambda}$ ($\Delta K_{\pi\lambda} < 0$) ή $\Delta K_{\Sigma} = U_{ελ} + |\Delta K_{\pi\lambda}|$. Σωστό το (γ). Δηλαδή το σώμα (Σ) παίρνει όλη την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο ($U_{ελ}$) και μέρος της κινητικής ενέργειας της πλατφόρμας ($|\Delta K_{\pi\lambda}|$)! Το ελατήριο προσφέρει την αποθηκευμένη σε αυτό ενέργεια στο σύστημα σώμα (Σ) - πλατφόρμα με τα οποία αλληλεπιδρά. Επειδή όμως οι δυνάμεις $\vec{F}_{ελ}$ και $\vec{F}'_{ελ}$ έχουν χαρακτήρα δράσης - αντίδρασης για το σύστημα σώμα (Σ) - πλατφόρμα, το έργο τους εκφράζει την επιπλέον μεταφορά ενέργειας $|\Delta K_{\pi\lambda}|$ από την πλατφόρμα στο σώμα (Σ).

B. B1. Από ΑΔΟ ως προς το δάπεδο $\rightarrow mv + MV = MV_0 + mV_0 \rightarrow \frac{m}{M}v + V = \frac{m}{M}V_0 + V_0$.
Όταν $m \ll M$ τότε $\frac{m}{M} \rightarrow 0$ οπότε $V \cong V_0$ (αρκεί να μην είναι πολύ μεγάλη και η ταχύτητα

εκτόξευσης). Τότε η πλατφόρμα αποτελεί αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Με εφαρμογή της ΑΔΕ ή του ΘΜΚΕ για το σώμα (Σ) ως προς τη πλατφόρμα παίρνουμε:
 $K_T - K_A = W_{\vec{F}_{ελ}} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m v_{\sigma\chi}^2 = \vec{F}_{ελ} \Delta l = \frac{k \Delta l}{2} \Delta l \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m v_{\sigma\chi}^2 = W_{\vec{F}_{ελ}} = \frac{1}{2} k \Delta l^2 \quad (2).$

Από (2) $\xrightarrow{\text{αντικατάσταση}}$ $v_{\sigma\chi} = 4\sqrt{5} \text{ m/s}$. Ως προς το δάπεδο είναι $v = V_0 + v_{\sigma\chi}$ ή $v = (10 + 4\sqrt{5}) \text{ m/s} = 18,94 \text{ m/s}$

B2. i) Ως προς τη πλατφόρμα: $\Delta K = K_T - K_A = W_{\vec{F}_{ελ}} = \frac{1}{2} k \Delta l^2$ ή $\Delta K = 40 \text{ J}$

ii) Ως προς το δάπεδο: $\Delta K' = K'_T - K'_A$ ή $\Delta K' = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m V_0^2$ ή $\Delta K' \cong 130 \text{ J}$.

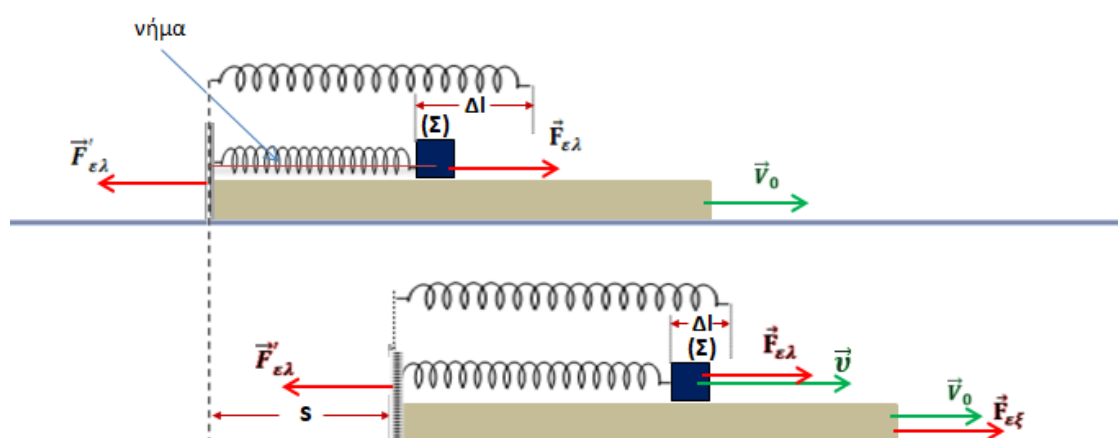
Για την ερμηνεία του αποτελέσματος: Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ ως προς το δάπεδο:

$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 = W'_{\vec{F}_{ελ}} \xrightarrow{v=V_0+v_{\sigma\chi}} \frac{1}{2} m v_{\sigma\chi}^2 + m V_0 v_{\sigma\chi} = W'_{\vec{F}_{ελ}} \quad (3)$ Από (2), (3) προκύπτει ότι ως προς το δάπεδο η ενέργεια που προσφέρεται στο σώμα (Σ) μέσω του $W'_{\vec{F}_{ελ}}$ είναι μεγαλύτερη αυτής που της προσφέρεται ως προς τη πλατφόρμα ($W'_{\vec{F}_{ελ}} > W_{\vec{F}_{ελ}}$) (!) Ας επιχειρήσουμε να αναζητήσουμε τη φυσική σημασία αυτού αρχικού συμπεράσματος:

Από (3) $\rightarrow \frac{1}{2} m v_{\sigma\chi}^2 + m V_0 v_{\sigma\chi} = \vec{F}_{ελ} (s + \Delta l) = \vec{F}_{ελ} s + \vec{F}_{ελ} \Delta l$ ή

$\frac{1}{2} m v_{\sigma\chi}^2 + m V_0 v_{\sigma\chi} = \vec{F}_{ελ} s + \frac{1}{2} k \Delta l^2 \quad (4)$. Από (2), (4) $\rightarrow m V_0 v_{\sigma\chi} = \vec{F}_{ελ} s \quad (5)$. Η (5) εκφράζει την ενέργεια που αφαιρείται από τη πλατφόρμα (με το έργο $W_{\vec{F}_{ελ}}$) και προσφέρεται στο σώμα (Σ) (με το έργο $W_{\vec{F}_{ελ}}$), οφείλεται στην αλληλεπίδρασή τους και είναι ανάλογη της ταχύτητας V_0 της πλατφόρμας ως προς το δάπεδο! Ένας παρατηρήτης «αποκλεισμένος» στη πλατφόρμα αυτό που «αντιλαμβάνεται» - μετράει είναι η ενέργεια $U_{ελ}$ που ο εκτοξευτήρας-ελατήριο μεταφέρει στο σώμα (Σ).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1. Αν οι μάζες M και m ήταν συγκρίσιμες, είχαν για παράδειγμα τις αρχικές τιμές τους τότε, για να κινείται η πλατφόρμα με σταθερή ταχύτητα κατά τη διάρκεια της αποσυμπίεσης του ελατηρίου, εκτός της δύναμης του ελατηρίου θα πρέπει να ασκείται σε αυτή και άλλη δύναμη $\vec{F}_{εξ}$ αντίθετη της $\vec{F}'_{ελ}$.



Τότε όμως το σύστημα πλατφόρμα- σώμα (Σ) δεν είναι μονωμένο οπότε δεν ισχύει η ΑΔΟ γι αυτό το σύστημα. Όμως, η πλατφόρμα αποτελεί και πάλι αδρανειακό σύστημα

όποτε εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ στο σώμα (Σ) ως προς το δάπεδο και τη πλατφόρμα οδηγούμαστε στα ίδια συμπεράσματα όπως στη περίπτωση που $M \gg m$ (απάντηση στο B1 και B2). Η $\vec{F}_{\varepsilon\xi}$ με το έργο της αναπληρώνει την ενέργεια που αφαιρείται από τη πλατφόρμα δια του έργου της $\vec{F}'_{\varepsilon\lambda}$, για να παραμένει σταθερή η ταχύτητα και η κινητική ενέργεια του σώματος Σ . Όμως ως προς το δάπεδο η αλληλεπίδραση σώματος (Σ) - πλατφόρμας έχει ως συνέπεια την επιπλέον μεταφορά ενέργειας $\bar{F}_{\varepsilon\lambda}s = mV_0u_{\sigma\chi}$ στο (Σ).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2. Η ισχύς της (5) δικαιολογείται και διαφορετικά:

$\bar{F}_{\varepsilon\lambda}s = \bar{F}_{\varepsilon\lambda}V_0\Delta t = (\bar{F}_{\varepsilon\lambda}\Delta t)V_0 = \Delta p V_0 = (mv - mV_0)V_0 = m(v - V_0)V_0$ ή $\bar{F}_{\varepsilon\lambda}s = mV_0u_{\sigma\chi}$ (5)
 Η (5) μας δίνει την ενέργεια που μεταφέρεται από τη πλατφόρμα στο σώμα (Σ) κατά την εκτόξευση υπό τις τεθείσες προϋποθέσεις.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3. Αν η πλατφόρμα ήταν αρχικά ακίνητη ως προς το δάπεδο ($V_0=0$) τότε: i) ΑΔΕ: $K_{\Sigma} + K_{\Pi} = U_{\varepsilon\lambda}$. ii) ΑΔΟ: $0 = mv - MV$ ή $\frac{v}{V} = \frac{M}{m}$ και

iii) $\frac{K_{\Sigma}}{K_{\Pi}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}MV^2} = \frac{m}{M} \left(\frac{M}{m}\right)^2$ ή $\frac{K_{\Sigma}}{K_{\Pi}} = \frac{M}{m}$. Δηλαδή η $U_{\varepsilon\lambda}$ μοιράζεται μεταξύ σώματος (Σ) -

πλατφόρμας σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα των μαζών τους. Το μικρότερης μάζας σώμα παίρνει το μεγαλύτερο μέρος της $U_{\varepsilon\lambda}$.

Αν $M \gg m$ τότε από $\frac{K_{\Sigma}}{K_{\Pi}} = \frac{M}{m} \rightarrow \frac{K_{\Sigma}}{K_{\Sigma} + K_{\Pi}} = \frac{M}{M + m} \rightarrow \frac{K_{\Sigma}}{U_{\varepsilon\lambda}} = \frac{M}{M + m} \rightarrow \frac{K_{\Sigma}}{U_{\varepsilon\lambda}} = \frac{1}{1 + \frac{m}{M}}$

ή $K_{\Sigma} \cong U_{\varepsilon\lambda}$.

Υπάρχουν και άλλες ειδικές περιπτώσεις, όπως αυτή του παρακάτω σχήματος με τις οποίες δεν θα ασχοληθούμε.

