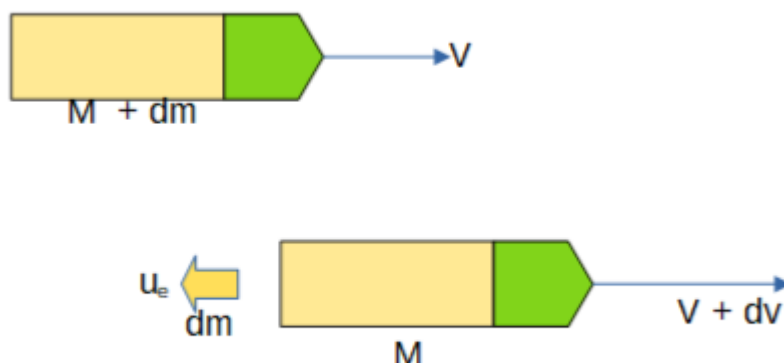




Πύραυλος μάζας $M + dm$ κινείται στο κενό με ταχύτητα V . Πορτοκαλί η δεξαμενή καυσίμων, πράσινο το ωφέλιμο φορτίο. Κάποια στιγμή εκτοξεύει ποσότητα καυσαερίων dm με ταχύτητα u_e **ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΠΥΡΑΥΛΟ** (σχετική) αντίθετης φοράς από τη κίνηση του πυραύλου με αποτέλεσμα η ταχύτητά του να αυξηθεί κατά dv .

α) Βρείτε τη δύναμη που δέχονται τα καυσαέρια και ο πύραυλος θεωρώντας θετική τη φορά κίνησης του πυραύλου. Η ταχύτητα εκτόξευσης καυσαερίων είναι σταθερή.

β) Βρείτε την ώθηση που δέχεται ο πύραυλος.

γ) Από την αρχή διατήρησης της ορμής στο σύστημα εκτοξευμένα καυσαέρια – πύραυλος και θεωρώντας M_f την τελική μάζα του πυραύλου μετά την εξάντληση **ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΚΑΥΣΙΜΩΝ** και M_i την αρχική αποδείξτε την πυραυλική εξίσωση Τσιολκόφσκι:

$$\Delta V = u_e \ln \frac{M_i}{M_f}.$$

δ) Με ποιους τρόπους μπορούμε να αυξήσουμε την ΔV ; Αν m_0 η μάζα της κατασκευής του πυραύλου και m_k η μάζα του καυσίμου, λύστε την εξίσωση της πυραυλικής ως προς m_k . Πως επηρεάζεται η αύξηση των καυσίμων με αύξηση της ΔV και δεδομένη u_e ;

Λύση

α) Αν F η δύναμη που δέχονται τα καυσαέρια από το θάλαμο καύσης του κινητήρα τότε για τα καυσαέρια η γενικευμένη έκφραση του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα δίνει:

$F = \frac{dP}{dt} = \frac{d(mu)}{dt} = m \frac{du}{dt} + u \frac{dm}{dt} \Rightarrow F = -u \frac{dm}{dt}$, η ταχύτητα εξόδου των καυσαερίων είναι σταθερή άρα $du = 0$.

Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα ο πύραυλος θα δέχεται δύναμη $-F$.

β) $F = \frac{dP}{dt} \Rightarrow Fdt = dP \Rightarrow I = dP$ (θεώρημα ώθησης – ορμής , I η ώθηση)
 $\Rightarrow I = u_e dm$

γ) Το σύστημα καυσαέρια – πύραυλος δεν υπόκειται στη δράση εξωτερικών δυνάμεων οπότε η μεταβολή της ορμής του συστήματος είναι 0 , $\Sigma F_{εξ} = 0 \Rightarrow dP_{ολ} = 0 \Rightarrow P_{αρχ} = P_{τελ} \Rightarrow 0 = Mdv - u_e dm \Rightarrow Mdv = u_e dm$ (1)

ΕΔΩ ΤΩΡΑ ΓΙΝΕΤΑΙ ΕΝΑ ΚΡΙΣΙΜΟ ΛΑΘΟΣ ΜΠΛΕΚΟΝΤΑΣ ΤΟ dm με το dM .

ΙΣΧΥΕΙ: Ο ρυθμός με τον οποίο ΑΥΞΑΝΕΤΑΙ η μάζα των καυσαερίων είναι ίσος με τον ρυθμό με τον οποίο ΜΕΙΩΝΕΤΑΙ η μάζα του υπόλοιπου πυραύλου. Δηλαδή: $\frac{dm}{dt} = - \frac{dM}{dt} \Rightarrow dm = - dM$ (2)

(1)(2) $\Rightarrow dV = -u_e \frac{dM}{M} \Rightarrow \int dV = -u_e \int \frac{dM}{M} \Rightarrow \Delta V = -u_e \ln M = -u_e (\ln M_f - \ln M_i) = u_e \ln(M_i - M_f) \Rightarrow$

$\Delta V = u_e \ln \frac{M_i}{M_f}$ πυραυλική εξίσωση Konstantin Tsiolkovsky

δ) Η ΔV είναι το βασικό στοιχείο της πυραυλικής. Προκειμένου να πετύχουν ένα ορισμένο ΔV η πρώτη ενέργεια είναι να έχουν μεγάλη ταχύτητα εξόδου καυσαερίων. Αυτό επιτυγχάνεται με την κατασκευή όλο και καλύτερων χημικών ή ηλεκτρικών – ηλεκτρομαγνητικών κινητήρων. Οι χημικοί κινητήρες είναι κινητήρες εσωτερικής καύσης και λειτουργούν με θερμοδυναμικούς κύκλους. Δε θα μπορούμε σε λεπτομέρειες απλά δύο στοιχεία. Ένα είναι τα ακροφύσια και το άλλο οι υψηλές πιέσεις στο θάλαμο καύσης.

Οι ηλεκτρικοί – ηλεκτρομαγνητικοί κινητήρες είναι κινητήρες ιόντων κυρίως Xe. Δεν αποτελούν το μέλλον στη πυραυλική καθώς ναι μεν έχουν πολύ μεγαλύτερες ταχύτητες εξόδου των ιόντων που επιτυγχάνονται από ομογενές ηλεκτρικό πεδίο ($F = Eq$) ή ομογενές μαγνητικό (δύναμη Lorentz $F = Buq$). Βέβαια δίνουν μεγαλύτερο ΔV από τους χημικούς για την ίδια ποσότητα καυσίμου, αλλά οι δυνάμεις που ασκούν στον πύραυλο είναι της τάξης των mN. Αυτό σημαίνει ότι

μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο στο κενό και για μεγάλο χρονικό διάστημα. Το διαστημόπλοιο Dawn έθεσε σε λειτουργία τους κινητήρες ιόντων στο διάστημα για 1000 συνεχόμενες ώρες.

Ας πάρουμε τώρα την πυραυλική εξίσωση:

$$\Delta V = u_e \ln \frac{M_i}{M_f} \quad \text{αν } m_K \text{ η μάζα των καυσασερίων και } m_0 \text{ η μάζα της}$$

κατασκευής τότε αν εξαντληθούν όλα τα καύσιμα:

$$\Delta V = u_e \ln \frac{m_0 + m_K}{m_0} \quad (3), \text{ για δεδομένη } u_e \text{ επιτυγχάνω μεγάλο } \Delta V \text{ για μικρό}$$

m_0 και μεγάλο m_K ώστε ο παρανομαστής του κλάσματος να είναι όσο το δυνατόν μικρότερος και το κλάσμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερο άρα και η ΔV .

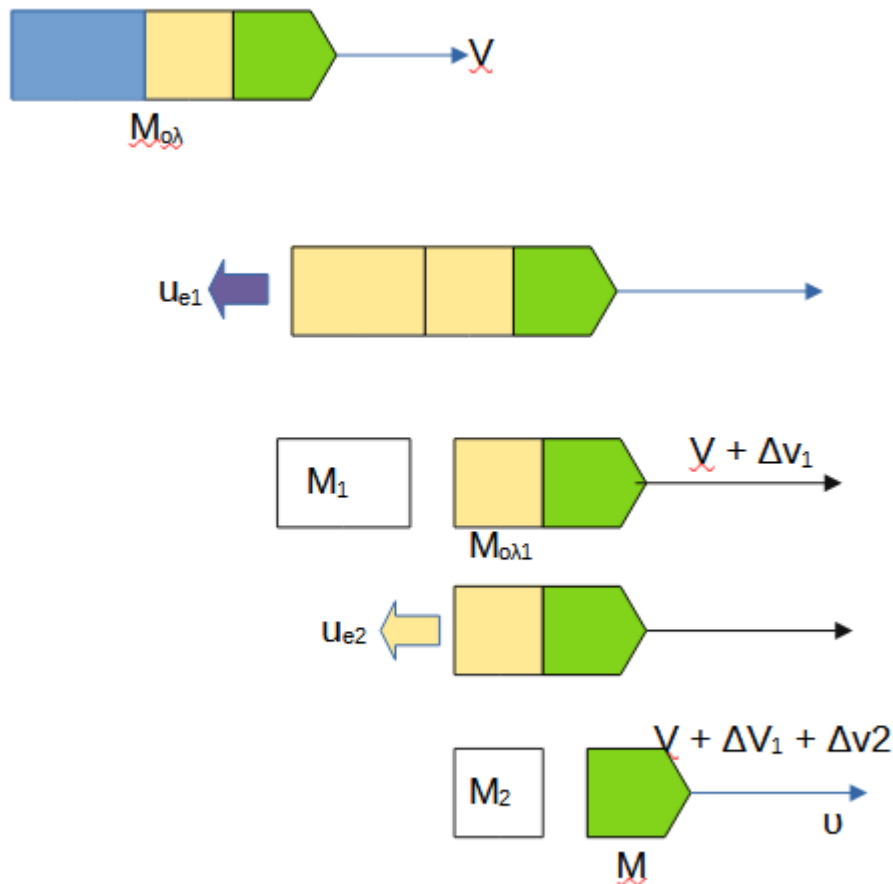
$$\text{Τώρα από (3)} \Rightarrow \frac{m_0 + m_K}{m_0} = e^{\Delta V / u_e} \Rightarrow m_K = m_0 (e^{\Delta V / u_e} - 1)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι θα λέγαμε ο εφιάλτης της διαστημικής καθώς με την αύξηση της ΔV για δεδομένη u_e τα καύσιμα αυξάνονται εκθετικά.

Μία σύντομη περιγραφή που αφορά το εγγύς μέλλον:

Ο πανίσχυρος κινητήρας RL10-X που θα χρησιμοποιηθεί στον πύραυλο SLS(Space Launch System) της NASA στα πλαίσια του προγράμματος Artemis για επάνοδο του ανθρώπου στη σελήνη και δημιουργία βάσης. Ο γίγαντας της NASA είναι πύραυλος 2 σταδίων με καίσιμο μίγμα οξυγόνου/υδρογόνου που μπορεί να μεταφέρει ωφέλιμο φορτίο 200 tn στη σελήνη. Ο RL10-X έχει τεράστια ταχύτητα εξόδου καυσασερίων 4565 m/s ασκεί δύναμη 39 MN + 4 κινητήρες ανά στάδιο και 2 για χρήση στο διάστημα.

Ο Raptor της SpaceX θα χρησιμοποιηθεί στον πλήρως επαναχρησιμοποιούμενο πύραυλο Starship με φιλόδοξο σχέδιο επανδρωμένες πτήσεις στον Άρη αλλά και μελλοντικό εποικισμό. Ο raptor με καύσιμο μεθάνιο είναι πρωταθλητής στην πίεση του θαλάμου καύσης με σχεδιασμό να αντέξει στη φανταστική τιμή των 350 bar. Η ταχύτητα εξόδου καυσασερίων είναι 3750 m/s και η δύναμη 3 MN + 33 κινητήρες πρώτου σταδίου + 6 για χρήση στο διάστημα. Στα σχέδια της SpaceX είναι να τοποθετήσει starship – δεξαμενές καυσίμου σε τροχιά στη γη και στον Άρη για ανεφοδιασμό εν πτήση.



$M_1 = 9 \text{ tn}$, $m_{K1} = 120 \text{ tn}$, $M_2 = 3 \text{ tn}$, $m_{K2} = 30 \text{ tn}$, $M = 3 \text{ tn}$, $u_{e1} = 2,6 \text{ km/s}$
 $u_{e2} = 3,2 \text{ km/s}$, $V = 5 \text{ km/s}$, $u =$;

Λύση

$$\Delta V_1 = u_{e1} \ln \frac{M_{o\lambda}}{M_{o\lambda} - m_{K1}} = 2,6 \ln \frac{9+120+3+30+3}{165-120} = 2,6 \ln \frac{165}{45} \Rightarrow \Delta V_1 = 3,378 \text{ km/s}$$

$$\Delta V_2 = u_{e2} \ln \frac{M_{o\lambda 1}}{M_{o\lambda 1} - m_{K2}} = 3,2 \ln \frac{3+30+3}{36-30} = 3,2 \ln \frac{36}{6} \Rightarrow \Delta V_2 = 5,734 \text{ km/s} \Rightarrow$$

$$u = 5 + 3,378 + 5,734 \Rightarrow$$

$$u = 14,112 \text{ km/s} \text{ ή } u = 50803 \text{ km/h}$$

Δηλαδή η ταχύτητα του διαστημόπλοιου αυξήθηκε από 18000 km/h σε 50803 km/h αφού κατανάλωσε 150 tn καύσιμα και πέταξε στα «σκουπίδια» 12 tn κατασκευής για να μεταφέρει ωφέλιμο φορτίο 3 tn στο κενό.