ΕΚΛΕΙΠΤΙΚΑ ΔΙΠΛΑ ΑΣΤΕΡΙΑ

3ος νόμος του Kepler στο ηλιακό μας και σε διπλά αστρικά συστήματα όπως διαμορφώθηκε από τον Νεύτωνα.

Πλανήτης μάζας m περιφέρεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r με ταχύτητα υ και περίοδο T γύρω από τον ήλιο μάζας M με την δύναμη παγκόσμιας έλξης κεντρομόλο. Τότε:

$\upsilon = \frac{2\pi r}{T}$, $F_g = F_c$ => $\frac{GMm}{r^2} = m\frac{\upsilon^2}{r}$ => $\frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$ => $\boldsymbol{\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}}$ **(1)**

Για τη γη r = 1 AU , T = 1 year => $\boldsymbol{\frac{r^3}{T^2}}$ **= 1 AU/year (2)**

(1)(2) => $\boldsymbol{\frac{GM}{4\pi^2}}$ **=1 AU³/year² (3)**

3ος νόμος του Kepler για σύστημα δύο σωμάτων συγκρίσιμης μάζας M_1 και M_2 που κινούνται γύρω από το κέντρο μάζας τους σε κυκλικές τροχιές με ακτίνες R_1 και R_2 με $R_1 + R_2 = r$ όπου r η μεταξύ τους απόσταση , ταχύτητες υ_1 και υ_2 και περίοδο T. Τότε:

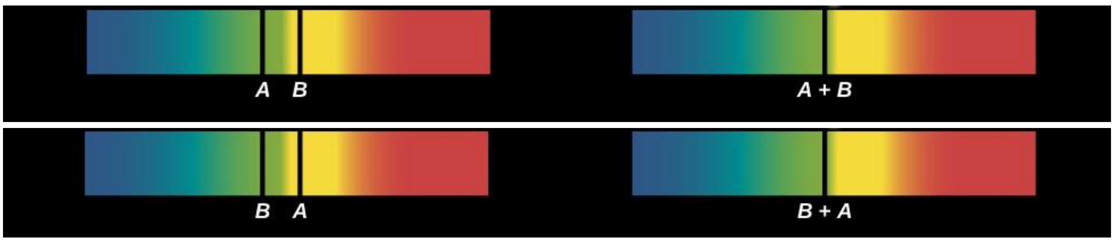
$\boldsymbol{\frac{r^3}{T^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}}$ **(4),** θέτοντας $\boldsymbol{M_1 + M_2}$ **= κM_H** όπου M_H η μάζα του ήλιου τότε (4) => $\boldsymbol{\frac{r^3}{T^2} = \frac{G\kappa M_H}{4\pi^2}}$ **(3)=>**

$\boldsymbol{\frac{r^3}{T^2}}$ **= Κ** με την r μετρημένη σε AU και την T σε years.

ΑΣΚΗΣΗ

Παρατηρητής στη γη παρατηρεί αστέρι του οποίου η λαμπρότητα μεταβάλλεται περιοδικά.

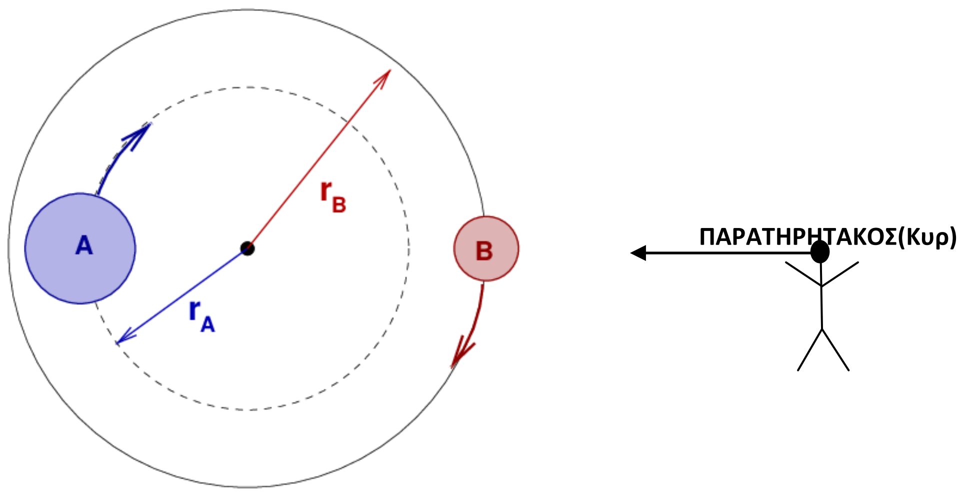
Λαμβάνοντας το φάσμα του αστέρα παρατήρησε την αποτύπωση μιας φασματικής γραμμής(μαύρη λωρίδα) δύο φορές, δηλαδή από δύο αντικείμενα.



Η εργαστηριακή αποτύπωση της γραμμής είναι στις θέσεις A + B ή B + A. Η φασματοσκοπική εικόνα δείχνει ότι πρόκειται για δύο αστέρια τα οποία κινούνται σε τροχιές που περίπου ταυτίζονται με την ευθεία παρατήρησης και εναλλάξ μπαίνουν το ένα μπροστά από το άλλο μειώνοντας αντίστοιχα τη συνολική λαμπρότητα.
Ας ξεκινήσουμε από τη θέση A+B τη χρονική στιγμή μηδέν όπου τα δύο αστέρια επικαλύπτονται και οι ταχύτητές τους είναι κάθετες στην ευθεία παρατήρησης με την ακτινική ταχύτητα να είναι μηδέν και να μην έχουμε μετατόπιση Doppler της φασματικής γραμμής. Αριστερά στη θέση A, B η φασματική γραμμή από το αστέρι A είναι μετατοπισμένη προς το κυανό που σημαίνει ότι έχει ακτινική ταχύτητα προς τα εμάς δηλαδή μας πλησιάζει, ενώ η φασματική γραμμή από το αστέρι B είναι μετατοπισμένη προς το κόκκινο που σημαίνει ότι απομακρύνεται από εμάς. Στη συνέχεια παρατηρούμε πάλι μία γραμμή B + A στο κανονικό μήκος κύματος, στο κάτω αριστερά σχήμα το αστέρι A απομακρύνεται και το B πλησιάζει και ακριβώς σε 5 ημέρες επανερχόμαστε στην κατάσταση της χρονικής στιγμής μηδέν =>

- ⇨ **ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ T = 5 days = 432000 s**

Δηλαδή έχουμε την εικόνα που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα με τα δύο αστέρια και τον παρατηρητή.

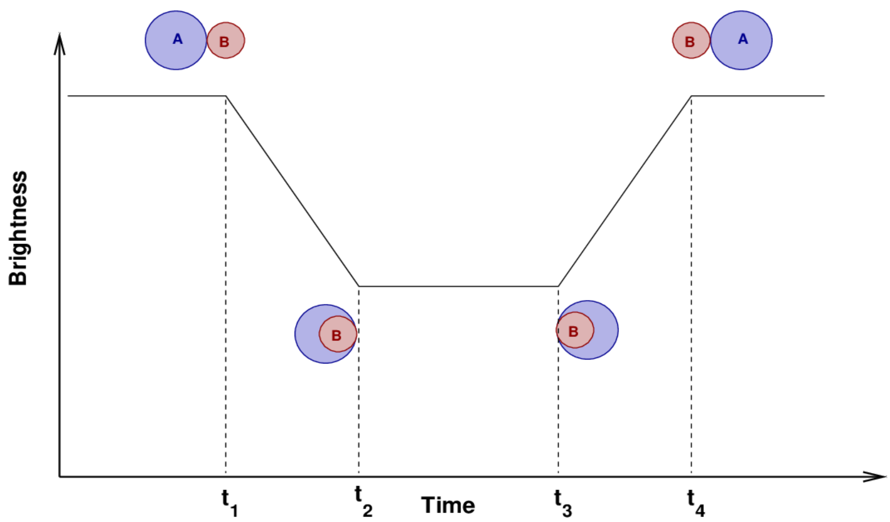


Στη συνέχεια ο παρατηρητής με μία κάμερα CCD καταγράφει την λαμπρότητα του συστήματος σε συνάρτηση με τη φάση(κλάσμα της περιόδου).

Η καμπύλη έχει ένα ελάχιστο λαμπρότητας όταν το μεγάλης ακτίνας αστέρι Α περνάει μπροστά από το μικρής ακτίνας Β και ένα περισσότερο «βαθύ» ελάχιστο όταν τον Β περνάει μπροστά από το Α. Τα ευθύγραμμα τμήματα είναι η λαμπρότητα του συστήματος όταν δεν έχουμε καμία επικάλυψη. (σχ. Κάτω).

Ο χρόνος από το πρώτο «βαθύ» ελάχιστο έως το επόμενο είναι μία περίοδος Τ την οποία υποδιαιρούμε σε κλάσματα του Τ.

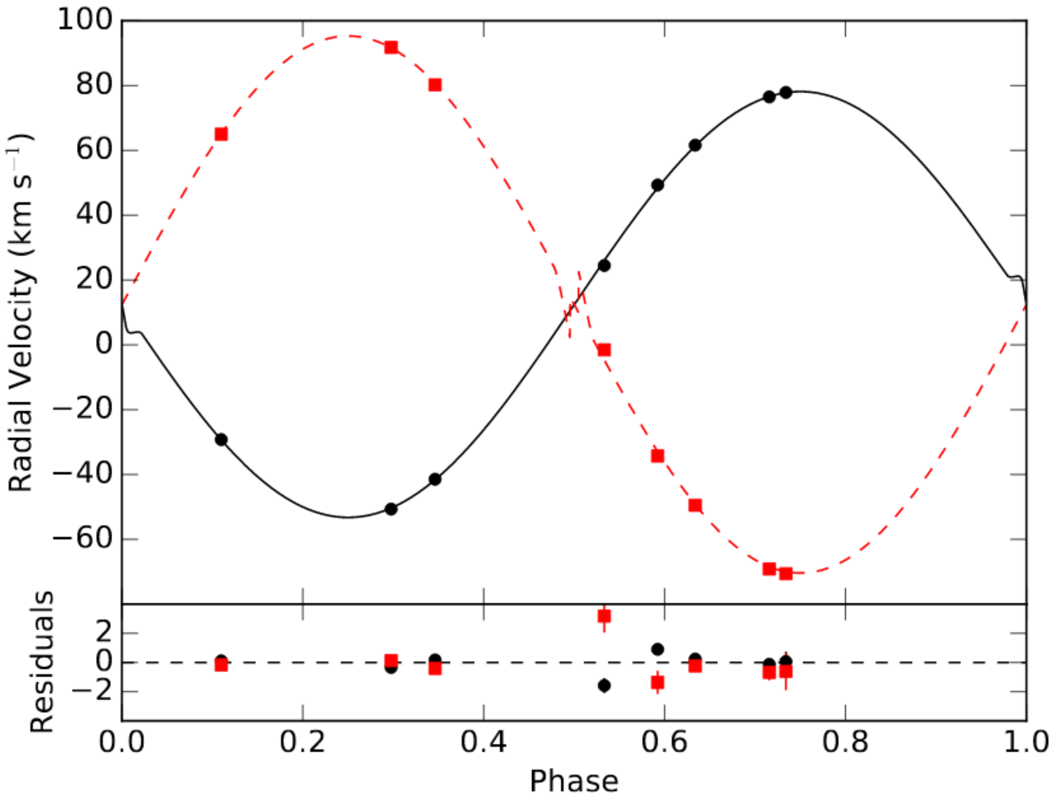
Παίρνουμε τώρα μεγεθυμένο το «αβαθές» ελάχιστο.



Ξεκινώντας από αριστερά. Τη χρονική στιγμή t_1 το αστέρι Α αγγίζει το Β και αρχίζει η μείωση της λαμπρότητας. Τη χρονική στιγμή t_2 το Α έχει καλύψει όλο το Β και αρχίζει το ελάχιστο της λαμπρότητας μέχρις τη χρονική στιγμή t_3 όπου το Α αρχίζει να εξέρχεται από τον δίσκο του Β. Τη χρονική στιγμή t_4 το Α έχει βγει από το δίσκο του Β.

Από τις υποδιαιρέσεις της περιόδου βρίσκουμε ότι t_4 - t_1 = 0,045T = 0,045χ432000 => **t_4 - t_1 = 19440 s** και t_3 – t_2 = 0,011T =>**t_3 – t_2=4752 s**

Επόμενο βήμα είναι να μετρήσουμε τις ακτινικές ταχύτητες σε διάφορες θέσεις με το φαινόμενο Doppler και να κατασκευάσουμε το διάγραμμα ακτινική ταχύτητα – χρόνος από το οποίο θα βρούμε την ταχύτητα κάθε αστέρα στην τροχιά του.



Η κόκκινη καμπύλη είναι για το Β και η μαύρη για το Α. Οι καμπύλες ξεκινούν από 14 km/s που είναι η ταχύτητα με την οποία το σύστημα απομακρύνεται από εμάς.

Επειδή οι ακτινικές ταχύτητες μηδενίζονται και μεγιστοποιούνται σχεδόν ταυτόχρονα τα άστρα κινούνται σε σχεδόν κυκλικές τροχιές. Ο μηδενισμός αντιστοιχεί στις θέσεις όπου η ευθεία που συνδέει τα δύο άστρα προεκτεινόμενη διέρχεται από το μάτι του παρατηρητή. Η μέγιστη τιμή αντιστοιχεί στην κάθετη προς την προηγούμενη ευθεία όπου η ακτινική ταχύτητα είναι ίση με την ταχύτητα των δύο άστρων στην τροχιά τους. Δηλαδή οι σταθερές ταχύτητες με τις οποίες τα άστρα στις τροχιές τους είναι ίσες με **υ_B = 98-14 = 84 km/s** και **μέτρο υ_A = 52 + 14 = 66 km/s.**

Γνωρίζοντας τις ταχύτητες και την περίοδο υπολογίστε τις ακτίνες των κυκλικών τροχιών και την απόσταση μεταξύ των άστρων σε AU.

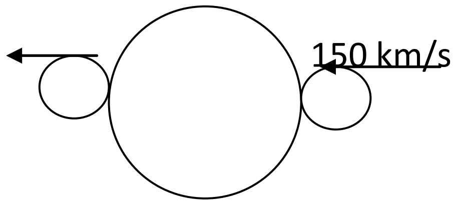
<u>Απάντηση</u>

$r_A = \frac{\upsilon_A T}{2\pi} = \frac{66\chi 432000}{2\pi}$ => r_A = 4.537.826 km =4.675.3355/150000000 => **r_A = 0,030252 AU ,** ομοίως r_A = 5.775.415 km **r_B = 0,038503 AU , r = r_A + r_B = 0,068755 AU**

Στη συνέχεια υπολογίστε τις ακτίνες των δύο αντικειμένων σε συνάρτηση με την ακτίνα του ήλιου R_H = 700.000 km με τα παρακάτω διαγράμματα όπου θεωρούμε το B ακίνητο και το A να διέρχεται από το B με σχετική ταχύτητα ίση με τη σχετική ταχύτητα των δύο άστρων **$\upsilon_{\sigma\chi}$ = υ_A + υ_B = 84 + 66 = 150 km/s και ακτίνα ήλιου R_H = 700.000 km**

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

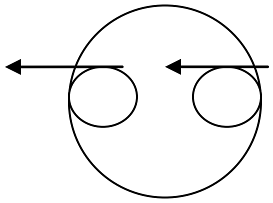
Από την πρώτη επαφή του B με το A t_1 έως την έξοδο του B από το A t_4



$2R_A + 2R_B$ = 150 km/s$(t_4 - t_1)$:2 = 150x19440:2

$R_A + R_B$ = 1.458.000 km (I)

Από t_2 όπου το B έχει μόλις μπει στο A μέχρι t_3 που αρχίζει να βγαίνει



$2R_A - 2R_B$ = 150 km/s$(t_3 – t_2)$ =>

$R_A – R_B$ = 150x4752:2 =>

$R_A – R_B$ = 356400 km (II)

(I),(II) => R_A = 907200 km = 907200:700000 => **R_A = 1,296R_H**

R_B = 550800 km **=>** **R_B = 0,787R_H**

Από τον τρίτο νόμο του Kepler υπολογίστε το άθροισμα των μαζών των δύο άστρων σε συνάρτηση με τη μάζα του ήλιου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είδαμε ότι r = 0,068755 AU και T = 5 days = 5/365 = 0,0137 years έτσι

$\frac{r^3}{T^2}$ = k => $\frac{0{,}068755^3}{0{,}0137^2}$ => k = 1,731 => $\mathbf{M_A + M_B = 1{,}732M_H}$ **(1)**

Το βαρύ άστρο κινείται σε τροχιά μικρότερης ακτίνας με μικρότερη ταχύτητα , δηλαδή οι μάζες των άστρων αντιστρόφως ανάλογες με τις ταχύτητές τους. Βρείτε τη μάζα κάθε αστέρα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$\frac{M_A}{M_B} = \frac{\upsilon_B}{\upsilon_A} = \frac{84}{66}$ => $\mathbf{M_A = 1{,}278M_B}$ **(2)**

(1),(2) => $\mathbf{M_B = 0{,}760M_H}$, $\mathbf{M_B = 0{,}972M_H}$