1. Σε πόση ακτίνα πρέπει να συμπιεστεί η γη ώστε να γίνει μαύρη τρύπα. μάζα γης $M_Γ$ = 6χ10^{24} kg , G = 6,67x10^{-11} Nm^2kg^{-2}.

Λύση

Για να γίνει μαύρη τρύπα θα πρέπει να έχει ακτίνα όση η ακτίνα Schwarzchild $R_s = \frac{2GM_Γ}{c^2}$ **= 9χ10^{-3} m περίπου ή 9 mm.**

2. Η πυκνότητα στη μοναδικότητα μιας μαύρης τρύπας είναι άπειρη. Συνήθως γίνεται το λάθος να λέμε ότι η πυκνότητα της μαύρης τρύπας είναι άπειρη.

α) Δείξτε ότι η πυκνότητα μαύρης τρύπας είναι αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της μάζας της.

β) Βρείτε την μέση πυκνότητα ρ μιας αστρικής μαύρης τρύπας με μάζα 5 μάζες ήλιου M_H = 2χ10^{30} kg και μίας υπέρμαζης με μάζα M = 5 δις μάζες ήλιου.

Λύση

α) Πυκνότητα μαύρης τρύπας ρ = M/V => $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_S^3}$ όπου R_s η ακτίνα Schwarzchild $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ έτσι: $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_S^3} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\frac{2^3\chi G^3 x M^3}{C^6}}$ => $\rho = \frac{3c^6}{32\pi G^3 M^2} = \frac{3x3^6x10^{48}}{32\pi x6,67^3x10^{-33}M^2}$ => $\boldsymbol{\rho = \frac{7,33\chi 10^{79}}{M^2}}$

β) M = 5x2χ10^{30} kg => $\rho = \frac{\mathbf{7,33\chi 10^{79}}}{\mathbf{10^{62}}}$ **=> ρ = 7,33χ10^{17} kg/m^3**

M = 5χ10^9χ2χ10^{30} = 10^{40} kg => **ρ = 0,733 kg/m^3**

3.Spaghettification

Σε ισχυρά ανομοιογενή βαρυτικά πεδία όπως οι μαύρες τρύπες η διαφορά βαρυτικής επιτάχυνσης μεταξύ των ποδιών και του κεφαλιού ενός αστροναύτη προκαλεί ισχυρές παλιρροϊκές επιταχύνσεις που έχουν σαν αποτέλεσμα το τέντωμα του σώματος ή μακαρονοποίηση ή spaghettification(εικόνα πάνω).
Θεωρούμε άνθρωπο ύψους d. Αν r η απόσταση του κέντρου μιας μη περιστρεφόμενης μαύρης τρύπας από τον άνθρωπο και M η μάζα της μαύρης τρύπας, τότε οι διαμετρικά αντίθετες επιταχύνσεις στα πόδια και στο κεφάλι του ανθρώπου που πέφτει με τη διεύθυνση πόδια – κεφάλι να περνά από το κέντρο της μαύρης τρύπας έχουν μέτρο $a_T = 2GMd/r^3$. Δείξτε ότι είναι κακή ιδέα να επισκεφτούμε τον ορίζοντα γεγονότων μιας μικρής αστρικής μαύρης τρύπας με μάζα 2 μάζες ήλιου, ενώ δε θα έχουμε πρόβλημα από τις παλιρροϊκές δυνάμεις στον ορίζοντα γεγονότων της υπέρμαζης μαύρης ττρύπας με μάζα 6,6 δισεκατομμύρια μάζες ήλιου στο κέντρο του γαλαξία M 87 της οποίας ο ορίζοντας γεγονότων αποτυπώθηκε πρόσφατα. $G = 6{,}67x10^{-11}$ Nm^2kg^{-2} , μάζα ήλιου M_H = $2χ10^{30}$ kg, ταχύτητα φωτός $c = 3x10^8$ m/s, d = 2 m.

Λύση

Η ακτίνα Schwarzschild μιας μαύρης τρύπας δίνεται από την εξίσωση $R_s = \frac{2GM}{c^2}$

Αστρική μαύρη τρύπα: $R_s = \frac{2x6{,}67x10^{-11}x2x2x10^{30}}{9x10^{16}}$ = $6x10^3$ m = 6 km

$a_T = \frac{2GMd}{R_S^3} = \frac{2x6{,}67x10^{-11}x2x2x10^{30}\chi 2}{6x36x10^9}$ => **$a_T = 4{,}94x10^9$ N/kg ή 494.000.000g**

όπου g η ένταση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης. Προφανώς ο άνθρωπος θα έχει διαλυθεί πριν φτάσει στον ορίζοντα γεγονότων.

Υπέρμαζη μαύρη τρύπα: $R_s = \frac{2x6{,}67x10^{-11}x6{,}6\chi 10^9x2x10^{30}}{9x10^{16}}$ = $3χ10^{13}$ m ή 30 δισεκατομμύρια km

$a_T = \frac{2GMd}{R_S^3} = \frac{2x6{,}67x10^{-11}x6{,}6x10^9x2x10^{30}\chi 2}{27x10^{39}}$ => **$a_T = 1{,}76x10^{-9}$ N/kg αμελητέα.**

Ο λόγος που η παλιρροϊκή επιτάχυνση είναι αμελητέα είναι το γεγονός ότι ο ορίζοντας γεγονότων απέχει πάρα πολύ από την μοναδικότητα.

ΣΗΜ. Θα μπορούσαμε να θεμελιώσουμε θεωρητικά το συμπέρασμα ως εξής: $a_T = \frac{2GMd}{R_S^3} = \frac{2GMd}{\frac{(2GM)^3}{c^6}} = \frac{dc^6}{4G^2M^2}$, δηλαδή **η παλιρροϊκή επιτάχυνση στον ορίζοντα γεγονότων είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μάζας της μαύρης τρύπας**.

4. Στην ταινία Interstellar του Kristopher Nolan το επιστημονικό κομμάτι επιμελήθηκε ο αστροφυσικός – κοσμολόγος Kip Thorne. Σύμφωνα με το σενάριο το γήινο διαστημόπλοιο με τους αστροναύτες αφού ταξίδεψε 10 δις km μέσα από σκουλικότρυπα προσεδαφίστηκε σε υδάτινο πλανήτη σε πολύ στενή τροχιά γύρω από την υπέρμαζη μαύρη τρύπα Gargantua 100 εκατομμυρίων ηλιακών μαζών που περιστρεφόταν με ακραία μεγάλη γωνιακή ταχύτητα. Η ακραία βαρύτητα στην τροχιά του πλανήτη επιβράδυνε σημαντικά το χρόνο ώστε 1 ώρα στον πλανήτη να αντιστοιχεί σε 7 χρόνια στη γη. Αν και μία τέτοια τροχιά είναι απίθανη, οριακά βρίσκεται στα όρια των υπολογισμών του Thorne.

Ας τροποποιήσουμε το σενάριο για μία άσκηση λυκείου. Γήινο διαστημόπλοιο προσεδαφίζεται σε πλανήτη που περιστρέφεται κυκλικά πολύ κοντά στον ορίζοντα γεγονότων ακίνητης αστρικής μαύρης τρύπας μάζας 5 ηλιακών μαζών. Η βαρυτική διαστολή του χρόνου είναι τέτοια ώστε 1 χρόνος στον πλανήτη να αντιστοιχεί σε 5 γήινα χρόνια.

α) Να βρεθούν η ακτίνα Schwarzschild της μαύρης τρύπας και η απόσταση από το κέντρο της στην οποία περιφέρεται ο πλανήτης.

β) Να βρεθεί η ταχύτητα περιφοράς και η περίοδος περιφοράς του πλανήτη με εφαρμογή της Νευτώνειας μηχανικής. Να συγκριθεί η ταχύτητα περιφοράς του πλανήτη με την ταχύτητα του φωτός.

γ) Ο κυβερνήτης του διαστημόπλοιου ηλικίας 25 χρόνων αφήνει στη γη την κόρη του 5 χρόνων. Αν θεωρήσουμε αμελητέο τον χρόνο μετάβασης στον πλανήτη και επιστροφής στη γη μέσα από σκουληκότρυπα, σε πόσα χρόνια παραμονής στον εξωπλανήτη ο κυβερνήτης επιστρέφοντας στη γη θα είναι συνομήλικος με την κόρη του;

δ) Υπάρχει κάποιο δεδομένο που καταστρέφει εξ ολοκλήρου το σενάριο;

Δεδομένα: Αν t ο χρόνος που μετράει παρατηρητής στη γη, τ ο χρόνος που μετράει παρατηρητής στον εξωπλανήτη, r_s η ακτίνα Schwarzschild της μαύρης τρύπας, r η ακτίνα τροχιάς του πλανήτη τότε $t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{r_S}{r}}}$, G = $6{,}67x10^{-11}$ Nm^2kg^{-2} , μάζα ήλιου $M_H = 2χ10^{30}$ kg, ταχύτητα φωτός c = $3x10^8$ m/s.

Λύση

α) $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ =>(M = $5M_H$) $r_s = \frac{2x6{,}67x10^{-11}x5x2x10^{30}}{9x10^{16}}$=>**$r_s$=14820 m=14,82 km**

$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{r_S}{r}}}$ => r = $r_s\frac{t^2}{t^2-\tau^2}$ =>(τ=1 χρόνος , t = 5 χρόνια) **r = 15437,5 m**

Δηλαδή ο πλανήτης περιστρέφεται μόλις 617,5 m πάνω από τον ορίζοντα γεγονότων της μαύρης τρύπας.

β) Η ελκτική δύναμη της μαύρης τρύπας στον πλανήτη παίζει το ρόλο κεντρομόλου. Αν υ η ταχύτητα περιφοράς του πλανήτη μάζας m γύρω από τη μαύρη τρύπα τότε $F_g = F_c \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ = 207861680 m/s => **υ = 207861,68 km/s , υ/c = 0,7 ή υ 70% της ταχύτητας του φωτός. Τ = 2πr/υ περίπου 5 δεκάκις χιλιοστά του δευτερολέπτου.**

γ)Έστω χ τα χρόνια παραμονής του κυβερνήτη στον εξωπλανήτη. Η κόρη του στη γη θα έχει μεγαλώσει κατά 5χ. Έτσι 25 + χ = 5 + 5χ => χ = 5 χρόνια, **δηλαδή σε 5 χρόνια ο κυβερνήτης θα επιστρέψει 30 χρονών συνομήλικος με την κόρη του κάνοντας ένα άλμα στο μέλλον του πλανήτη του.**

δ)Σύμφωνα με την άσκηση 4 οι παλιρροϊκές δυνάμεις κοντά σε αστρικές μαύρες τρύπες είναι τεράστιες. Πράγματι. $a_T = \frac{2GMd}{r^3}$ = πάνω από **72,5 εκ g.**

5.Όριο Roche

Για βραχώδη αντικείμενα γύρω από μεγάλα σώματα η συνεκτικότητά τους εξασφαλίζεται μόνο από βαρυτικές δυνάμεις. Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την οριακή απόσταση του αντικειμένου από το μεγάλο σώμα πέραν του οποίου αρχίζει η διάλυσή του από τις παλιρροϊκές δυνάμεις. Η παραπάνω οριακή απόσταση ονομάζεται όριο Roche. Κατά μία θεωρία οι δακτύλιοι του Κρόνου σχηματίστηκαν από διάλυση δορυφόρου του που βρέθηκε μέσα στο όριο Roche. Ο δορυφόρος φόβος του Άρη μόλις στα 9380 km από το κέντρο του πλανήτη βρίσκεται κοντά στο όριο Roche και συνεχώς πλησιάζει.

α)Θεωρείστε μικρό σφαιρικό βραχώδες σώμα ακτίνας R και μάζας m σε απόσταση r από το κέντρο μεγάλου σφαιρικού σώματος μάζας Μ. Η ύλη στην επιφάνεια του μικρού σώματος δέχεται τις αντίθετες επιταχύνσεις της βαρύτητας g και της παλιρροϊκής επιτάχυνσης $a_T = \frac{2GMR}{r^3}$ από το μεγάλο σώμα. Δείξτε ότι το όριο Roche για το μικρό σώμα είναι $r_R = R(\frac{2M}{m})^{1/3}$.

β) Να γίνει εφαρμογή για τον εξωπλανήτη της προηγούμενης άσκησης αν είναι βραχώδης ακτίνας R = 10.000 km και μάζας m = $5M_Γ$ όπου $M_Γ$ = $6χ10^{24}$ kg η μάζα της γης.

Λύση

α) Θα πρέπει οριακά $a_T = g \Rightarrow \frac{2GMR}{r^3} = \frac{Gm}{R^2} \Rightarrow r^3 = R^3(2M/m) \Rightarrow$ $\mathbf{r_R = R(\frac{2M}{m})^{1/3}}$.

β) r_R = 10.000 km$(2x5x2x10^{30}/3x10^{25})^{1/3}$ => **r_R = 873580 km**

Στην άσκηση 5 είχαμε δεχτεί τον πλανήτη μόλις 15 km από το κέντρο της μαύρης τρύπας.

6. Στις 14 Σεπτεμβρίου 2015 τα δύο εργαστήρια **LIGO** (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) που είχαν δημιουργηθεί για τον εντοπισμό Βαρυτικών Κυμάτων , εντόπισαν βαρυτικά κύματα από τη σύγκρουση δύο μαύρων τρυπών, η μία με μάζα 36 ηλιακών μαζών και η άλλη με 29 ηλιακές μάζες σε απόσταση 1,3 δισεκατομμυρίων ετών φωτός από τη Γη. Λίγο πριν από την σύγκρουση οι δύο μαύρες τρύπες περιφέρονταν η μία γύρω από την άλλη 250 φορές/sec ενώ η ταχύτητα περιφοράς τους έφτανε τα 150.000 km/s. Από τη σύγκρουση δημιουργήθηκε μαύρη τρύπα 62 ηλιακών μαζών . Οι τρεις “χαμένες” ηλιακές μάζες μετετράπησαν σε ενέργεια βαρυτικών κυμάτων σύμφωνα με την περίφημη εξίσωση του Einstein ($E=\Delta mc^2$). Παρά το γεγονός της αδιανόητα μεγάλης ενέργειας που ελευθερώθηκε η παραμόρφωση που κατέγραψαν τα δύο συμβολόμετρα LIGO δεν υπερέβαινε τα τέσσερα χιλιοστά της διαμέτρου πρωτονίου.

α) Πόση ενέργεια απελευθερώθηκε από τη σύγκρουση;

β) Η ενέργεια που ανά δευτερόλεπτο εκλύει ο ήλιος μας είναι $4χ10^{26}$ J. Ο γαλαξίας μας έχει περί τα 400 δις αστέρια. Πόσοι γαλαξίες σαν τον δικό μας δίνουν την ενέργεια που ελευθερώθηκε από τη σύγκρουση των δύο μελανών οπών; Μάζα ήλιου M = $2χ10^{30}$ kg.

Λύση

$E = \Delta mc^2 = 6x10^{30}x9x10^{16}$ => **$E = 5,4x10^{47}$ J**

Ενέργεια όλων των άστρων του γαλαξία μας $E_Γ=4χ10^{11}χ4χ10^{27}= 1,6χ10^{39}$ J

Οι γαλαξίες N που απαιτούνται για να δώσουν την ενέργεια που ελευθερώθηκε από τη σύγκρουση των μελανών οπών N = $5,4χ10^{47}/1,6χ10^{39}$ => N = $3,375χ10^8$ γαλαξίες ή **337 εκατομμύρια γαλαξίες!!! Περίπου.**