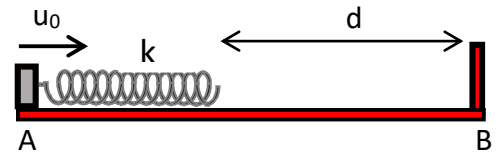


ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ- ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΑΤ

Α. ΘΕΜΑΤΑΚΙΑ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ ΜΕ ΑΑΤ

Παράδειγμα 1.

Το ακίνητο σώμα μάζας $m=1\text{Kg}$ συνδέεται με το αριστερό άκρο του ιδανικού, οριζόντιου, ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$ και είναι πάνω στο σημείο Α του λείου οριζοντίου επιπέδου ΑΒ. Στο σημείο Β του επιπέδου είναι στερεωμένο λεπτό κατακόρυφο τοίχωμα. Το δεξιό άκρο του ελατηρίου απέχει $d=1\text{m}$ από το τοίχωμα. Δίνουμε στο σώμα οριζόντια ταχύτητα μέτρου $u_0 = 2 \text{ m/s}$ προς τα δεξιά.



- α) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που δίνουμε ταχύτητα στο σώμα, μέχρι τη στιγμή που διέρχεται πάλι από το σημείο Α.
- β) Να βρεθεί το διάστημα που διανύει το σώμα από τη στιγμή που του δίνουμε ταχύτητα, μέχρι τη στιγμή που διέρχεται πάλι από το σημείο Α.
- γ) Αν $t=0$ είναι η στιγμή που έρχεται σε επαφή το δεξιό άκρο του ελατηρίου με το τοίχωμα και η θετική φορά για τις αλγεβρικές τιμές είναι προς τα δεξιά, να βρεθεί η αλγεβρική τιμή της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο τοίχωμα σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η αντίστοιχη γραφική παράσταση.

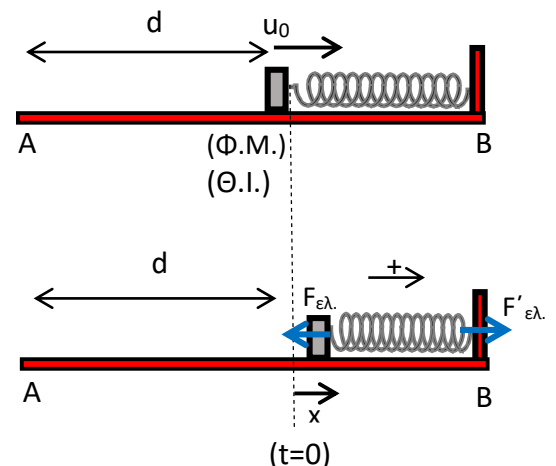
Απάντηση

Το σώμα εκτελεί ΕΟΚ για διάστημα d , στη συνέχεια μισή ταλάντωση και τέλος πάλι ΕΟΚ για διάστημα d μέχρι το σημείο Α.

$$\alpha) t_{A \rightarrow A} = t_{A \rightarrow \Theta.I.} + t_{\Theta.I. \rightarrow \Theta.I.} + t_{\Theta.I. \rightarrow A}$$

Το μέτρο της ταχύτητας από το Α μέχρι τη $\Theta.I.$ και από τη $\Theta.I.$ μέχρι το Α είναι $u_0 = 2 \text{ m/s}$.

$$t_{A \rightarrow \Theta.I.} = t_{\Theta.I. \rightarrow A} = \frac{d}{u_0} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ s}$$



$$\text{και } t_{\Theta.I. \rightarrow \Theta.I.} = T/2 = (2\pi \sqrt{\frac{m}{k}})/2 = \pi \sqrt{\frac{1}{100}} = 0,1\pi \text{ s}$$

$$\text{Άρα } t_{A \rightarrow A} = 2 \cdot 0,5 + 0,1\pi = (1 + 0,1\pi) \text{ s}$$

$$\beta) \text{ Το πλάτος ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση } u_0 = \omega A \Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{\frac{100}{1}}} = 0,2\text{m}$$

$$S_{A \rightarrow A} = S_{A \rightarrow \Theta.I.} + S_{\Theta.I. \rightarrow \Theta.I.} + S_{\Theta.I. \rightarrow A} = 2d + 2A = 2 + 0,4 = 2,4\text{m}$$

$$\gamma) F_{\varepsilon\lambda} = -kx \text{ όπου } x = A\eta\mu\omega t \text{ με } A=0,2 \text{ και } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10\text{rad/s}$$

$$\text{Άρα } F_{\varepsilon\lambda} = -kA\eta\mu\omega t \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = -100 \cdot 0,2 \cdot \eta\mu 10t \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = -20\eta\mu 10t$$

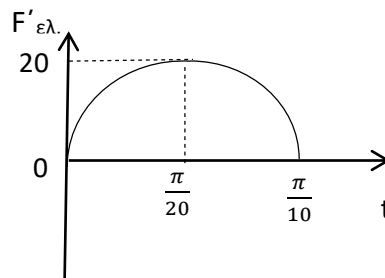
Η δύναμη που ασκεί το ελατήριο (επειδή είναι αβαρές) στο τοίχωμα είναι :

$$F'_{\varepsilon\lambda} = -F_{\varepsilon\lambda} = 20\eta\mu 10t$$

$$\text{Για } t=0, F'_{\varepsilon\lambda} = 20\eta\mu 0 = 0$$

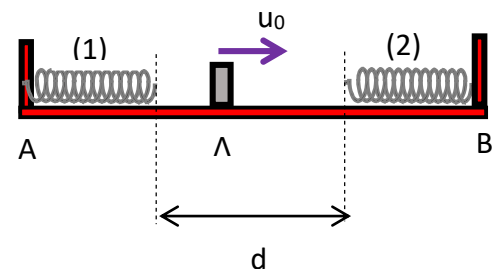
$$t = \frac{\pi}{20}, F'_{\varepsilon\lambda} = 20\eta\mu 10 \cdot \frac{\pi}{20} = 20\eta\mu \frac{\pi}{2} = 20\text{N}$$

$$t = \frac{\pi}{10}, F'_{\varepsilon\lambda} = 20\eta\mu \pi = 0$$



Εφαρμογή 1

Τα οριζόντια ελατήρια (1), (2) με σταθερές $k_1=k$, $k_2=4k$ αντίστοιχα, συνδέονται με τα κατακόρυφα τοιχώματα τα οποία είναι στερεωμένα στα άκρα A,B του λείου οριζόντιου επιπέδου. Η απόσταση μεταξύ των ελεύθερων άκρων των ελατηρίων είναι d. Σε σώμα μάζας m δίνουμε οριζόντια ταχύτητα μέτρου u_0 , προς τα δεξιά από ένα σημείο Λ του επιπέδου το οποίο βρίσκεται μεταξύ των ελεύθερων άκρων των ελατηρίων.



A. Το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που δίνουμε στο σώμα ταχύτητα u_0 μέχρι να περάσει από το σημείο Λ για δεύτερη φορά είναι :

$$\alpha .) \Delta t = \frac{2d}{u_0} + 3\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \beta) \alpha) \Delta t = \frac{d}{u_0} + 5\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (+ \text{ αιτιολόγηση})$$

B. Το διάστημα που διανύει το σώμα στο χρονικό διάστημα του ερωτήματος A είναι

$$\alpha) S = 2d + 5u_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \beta .) S = 2d + 3u_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (+ \text{ αιτιολόγηση})$$

Γ. Αν η μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης του ελατηρίου (1) είναι $F_{\epsilon\lambda. \max 1}$ και η μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης του ελατηρίου (2) είναι $F_{\epsilon\lambda. \max 2}$, η σχέση μεταξύ τους είναι

$$\alpha .) F_{\epsilon\lambda. \max 2} = 2 F_{\epsilon\lambda. \max 1} \quad \beta) F_{\epsilon\lambda. \max 2} = 4 F_{\epsilon\lambda. \max 1} \quad (+ \text{ αιτιολόγηση})$$

Παράδειγμα 2

Το ακίνητο σώμα μάζας $m=1\text{Kg}$ συνδέεται με το πάνω άκρο του αβαρούς, κατακόρυφου, ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$.

Το κάτω άκρο του ελατηρίου είναι σε επαφή με το δάπεδο.

Κατεβάζουμε κατακόρυφα το σώμα κατά $d=0,1\sqrt{2}\text{ m}$ και τη χρονική στιγμή $t=0$ το αφήνουμε.

Να βρεθούν

α) Η χρονική στιγμή $t=t_1$ που το ελατήριο χάνει την επαφή του με το δάπεδο

β) Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 .

γ) Η χρονική στιγμή $t=t_2$ που το σώμα φτάνει στο μέγιστο ύψος.

δ) Το μέγιστο ύψος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

ε) Η χρονική στιγμή που θα βρεθεί το σώμα στη θέση από την οποία το αφήσαμε, για δέκατη φορά.

Απάντηση.

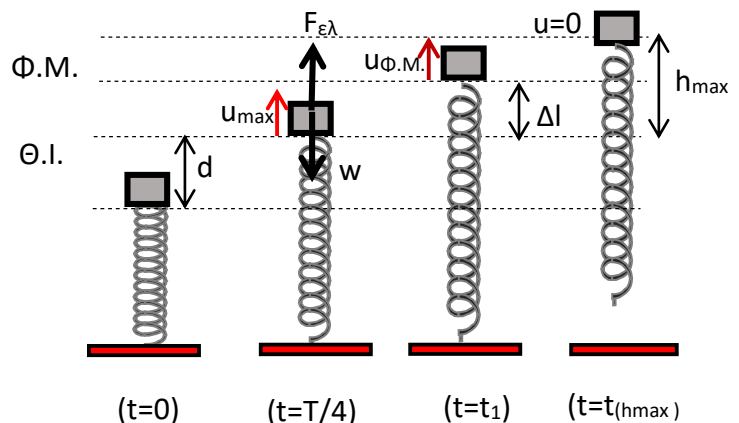
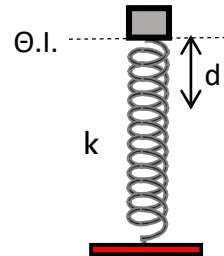
$$\alpha) t_1 = T/4 + t_{(\Theta.I. \rightarrow \Phi.M.)} \quad (1)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{\pi}{5} \text{ s} \quad (2)$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης για $t=0$ το σώμα να είναι στη θέση ισορροπίας με θετική φορά προς τα πάνω είναι :

$$x = A\eta\omega t = 0,1\sqrt{2} \eta\mu \sqrt{\frac{100}{1}} t \Rightarrow$$

ΠΑΝΑΝΑΣ ΓΙΑΝΝΗΣ ΦΥΣΙΚΟΣ



$$x = 0,1\sqrt{2} \eta \mu 10t$$

$$\text{Στη } \Theta.I. \quad \Sigma F = 0 \Rightarrow k \Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = 0,1 \text{ m}$$

Με αντικατάσταση $x = \Delta l = 0,1 \text{ m}$ στην εξίσωση $x = 0,1\sqrt{2} \eta \mu 10t$, βρίσκουμε τον χρόνο $t_{(\Theta.I. \rightarrow \Phi.M.)}$:

$$0,1 = 0,1\sqrt{2} \eta \mu 10 t_{(\Theta.I. \rightarrow \Phi.M.)} \Rightarrow \eta \mu 10 t_{(\Theta.I. \rightarrow \Phi.M.)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και η μικρότερη γωνία } 10 t_{(\Theta.I. \rightarrow \Phi.M.)} \text{ είναι}$$

$$10 t_{(\Theta.I. \rightarrow \Phi.M.)} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t_{(\Theta.I. \rightarrow \Phi.M.)} = \frac{\pi}{40} \text{ s} \quad (3)$$

$$\text{Η (1) λόγω των (2),(3) } \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{40} = \frac{3\pi}{40} \text{ s}$$

β)

1^{ος} τρόπος από την εξίσωση της ταχύτητας.

$$u = u_{\max} \sin \omega t = A \omega \sin \omega t = 0,1\sqrt{2} \cdot 10 \sin 10t = \sqrt{2} \sin 10t \text{ και με αντικατάσταση } t = t_{(\Theta.I. \rightarrow \Phi.M.)}$$

η ταχύτητα του σώματος στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου είναι :

$$u_{\Phi.M.} = \sqrt{2} \sin 10 t_{(\Theta.I. \rightarrow \Phi.M.)} \text{ και λόγω της (3) } u_{\Phi.M.} = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow u_{\Phi.M.} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \text{ m/s}$$

2^{ος} τρόπος από την ΑΔΕ ταλάντωσης.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΕ_{ταλ.} από τη θέση που αφήσαμε το σώμα μέχρι τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου.

$$\frac{1}{2} k d^2 = \frac{1}{2} k x_{\Phi.M.}^2 + \frac{1}{2} m u_{\Phi.M.}^2 \Rightarrow k d^2 = k x_{\Phi.M.}^2 + m u_{\Phi.M.}^2 \Rightarrow k (0,1\sqrt{2})^2 = k (0,1)^2 + m u_{\Phi.M.}^2$$

$$\Rightarrow 100 (0,1\sqrt{2})^2 = 100(0,1)^2 + 1 \cdot u_{\Phi.M.}^2 \Rightarrow u_{\Phi.M.}^2 = 1 \Rightarrow u_{\Phi.M.} = \pm 1$$

και επειδή έχουμε θεωρήσει θετικά προς τα πάνω $u_{\Phi.M.} = 1 \text{ m/s}$

γ)

Μετά τη θέση του $\Phi.M.$ του ελατηρίου το σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω.

$$t_{(\Phi.M. \rightarrow h_{\max})} = \frac{u_{\Phi.M.}}{g} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ s}$$

$$\text{Άρα από } t=0, t_{h_{\max}} = t_1 + t_{(\Phi.M. \rightarrow h_{\max})} = \left(\frac{3\pi}{40} + 0,1 \right) \text{ s}$$

δ)

$$h_{(\Phi.M. \rightarrow u=0)} = \frac{u_{\Phi.M.}^2}{2g} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ m}$$

$$\text{Άρα } h_{(\Theta.I. \rightarrow u=0)} = h_{\max} = \Delta l + h_{(\Phi.M. \rightarrow u=0)} \Rightarrow h_{\max} = 0,1 + 0,05 = 0,15 \text{ m}$$

ε)

Τη στιγμή που αφήνουμε το σώμα την $t=0$, βρίσκεται την πρώτη φορά στη θέση αυτή.

Από τη θέση που το αφήσαμε μέχρι το $h_{\max}$ ο χρόνος είναι $\Delta t = t_1 + t_{(\Phi.M. \rightarrow h_{\max})} = \left(\frac{3\pi}{40} + 0,1\right) \text{ s}$.

Από το $h_{\max}$ μέχρι τη θέση που αφήσαμε το σώμα, αυτό εκτελεί ελεύθερη πτώση και στη συνέχεια κάνει αντίστροφα, την ταλάντωση που είχε εκτελέσει.

Για την ελεύθερη πτώση από το ύψος $h_{(\Phi.M. \rightarrow u=0)} = 0,05\text{m}$ ο χρόνος προκύπτει από τη σχέση

$$h_{(\Phi.M. \rightarrow u=0)} = \frac{1}{2} g t_{(u=0 \rightarrow \Phi.M.)}^2 \Rightarrow 0,05 = \frac{1}{2} 10 \cdot t_{(u=0 \rightarrow \Phi.M.)}^2 \Rightarrow t_{(u=0 \rightarrow \Phi.M.)} = 0,1\text{s}$$

Άρα από το $h_{\max}$ μέχρι τη θέση που αφήσαμε το σώμα ο χρόνος είναι $\Delta t = \left(0,1 + \frac{3\pi}{40}\right) \text{ s}$

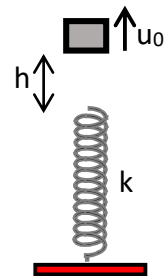
Επομένως ο χρόνος από την πρώτη μέχρι τη δεύτερη φορά είναι $2 \Delta t = 2\left(\frac{3\pi}{40} + 0,1\right) \text{ s}$

Η χρονική στιγμή που θα βρεθεί στη θέση που αφήσαμε το σώμα για δέκατη φορά είναι :

$$t_{(10)} = 9 \cdot 2\left(\frac{3\pi}{40} + 0,1\right) = 18\left(\frac{3\pi}{40} + 0,1\right) \text{ s}$$

Εφαρμογή 2

Το κάτω άκρο του κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=100 \text{ N/m}$ συνδέεται με το δάπεδο και το πάνω του άκρο είναι ελεύθερο. Από ύψος $h=0,1\text{m}$ από το πάνω άκρο του ελατηρίου, δίνουμε σε σώμα μάζας $m=1\text{Kg}$ κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου $u_0 = 1\text{m/s}$ προς τα πάνω, τη χρονική στιγμή $t=0$. Το σώμα κινείται διαρκώς στην κατακόρυφη διεύθυνση. Δεν του ασκείται δύναμη από τον αέρα. Δίνεται $\sqrt{3} = 1,7$



Να βρείτε

α) Τη χρονική στιγμή $t = t_1$ που το σώμα θα έλθει σε επαφή με το πάνω άκρο του ελατηρίου. ($t_1=0,27\text{s}$)

β) Την ταχύτητα του σώματος u_1 τη χρονική στιγμή t_1 . ($u_1 = \sqrt{3} \text{ m/s}$)

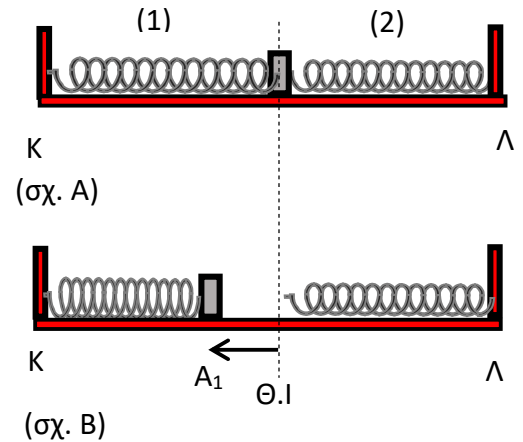
γ) Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας του σώματος ($u_{\max} = 2 \text{ m/s}$)

δ) Το πλάτος ταλάντωσης του σώματος όταν είναι σε επαφή με το ελατήριο. ($A = 0,2 \text{ m}$)

ε) Τη χρονική στιγμή που θα βρεθεί το σώμα στη θέση από την οποία του δώσαμε u_0 , για ενδέκατη φορά. ($t_{(11)} = \left(3,4 + \frac{5\pi}{6}\right) \text{ s}$)

Παράδειγμα 3

Τα οριζόντια ελατήρια (1), (2) με σταθερές $k_1=k$, $k_2=3k$ αντίστοιχα, συνδέονται με τα κατακόρυφα τοιχώματα που είναι στερεωμένα στα άκρα Κ,Λ του λείου οριζώντιου επιπέδου. Το ελατήριο (1) συνδέεται με το σώμα και το ελατήριο (2) είναι σε επαφή με το σώμα. Το σώμα είναι ακίνητο και τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. (σχ. Α). Μετατοπίζουμε το σώμα αριστερά κατά A_1 και το αφήνουμε (σχ. Β).



Ποιες από τις σχέσεις είναι σωστές και γιατί.

A. Το πλάτος ταλάντωσης A_2 όταν το σώμα είναι σε επαφή με το ελατήριο (2) είναι:

α) $A_2 = 2 A_1$ β) $A_2 = A_1 / 2$

Απάντηση.

Όταν το σώμα κάνει ταλάντωση σε σύνδεση με το ελατήριο (1) –ταλάντωση 1– η σταθερά ταλάντωσης είναι $D_1 = k$ και όταν κάνει ταλάντωση σε σύνδεση με το ελατήριο (1) και σε επαφή με το ελατήριο (2) –ταλάντωση 2– η σταθερά ταλάντωσης είναι $D_2 = k + 3k = 4k$. Η θέση ισορροπίας του σώματος είναι ίδια και για τις δυο ταλαντώσεις (Σχ.β)

Εφαρμόζουμε την ΑΔΕ_{ταλ.1} μεταξύ A_1 - Θ.Ι. $\frac{1}{2} k A_1^2 = \frac{1}{2} m u_{\max}^2$ (1)

Εφαρμόζουμε την ΑΔΕ_{ταλ.2} μεταξύ Θ.Ι. - A_2 . Η $u_{\max}$ είναι ίδια και για τις δύο ταλαντώσεις.

$$\frac{1}{2} m u_{\max}^2 = \frac{1}{2} 4k A_2^2 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{1}{2} k A_1^2 = \frac{1}{2} 4k A_2^2 \Rightarrow A_1^2 = 4 A_2^2 \Rightarrow A_1 = 2 A_2 \Rightarrow A_2 = A_1 / 2 \quad (\text{το } \beta)$$

B. Αν η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος της ταλάντωσης 1 είναι T_1 και η περίοδος της ταλάντωσης του 2 είναι T_2 , η σχέση μεταξύ τους είναι

α) $T_1 = 2T_2$ β) $T_2 = 2T_1$

Απάντηση

Η περίοδος $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ και η περίοδος $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{4k}} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{2} \cdot T_1 \Rightarrow T_1 = 2T_2$ (το α)

Γ. Όταν το μέτρο της απομάκρυνσης του σώματος στην ταλάντωση 1 είναι $A_1/2$, το μέτρο της δύναμης επαναφοράς του είναι $F_{\varepsilon\pi.1}$. Όταν το μέτρο της απομάκρυνσής του στην ταλάντωση 2 είναι $A_2/2$, το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου (2) είναι $F_{\varepsilon\lambda.2}$. Η σχέση μεταξύ των $F_{\varepsilon\pi.1}$, $F_{\varepsilon\lambda.2}$ είναι

$$\alpha) F_{\varepsilon\lambda.2} = \frac{3}{4} F_{\varepsilon\pi 1} \quad \beta) F_{\varepsilon\lambda.2} = \frac{3}{2} F_{\varepsilon\pi 1}$$

Απάντηση.

$$F_{\varepsilon\pi 1} = k A_1/2, F_{\varepsilon\lambda 2} = 3k A_2/2 \text{ όμως } A_2 = A_1/2 \text{ άρα } F_{\varepsilon\lambda 2} = 3k A_1/4 = \frac{3}{2} k A_1/2 = \frac{3}{2} F_{\varepsilon\pi 1} \text{ (το } \beta)$$

Δ. Η χρονική στιγμή που το μέτρο της απομάκρυνσης του κινητού είναι $A_1/2$ για πρώτη φορά από τη στιγμή που το αφήσαμε είναι t_1 και η χρονική στιγμή που το μέτρο της ταχύτητας του κινητού είναι $u_{\max}/2$ για δεύτερη φορά από τη στιγμή που το αφήσαμε είναι t_2 . Η σχέση μεταξύ των t_1 , t_2 είναι

$$\alpha) t_2 = 2 t_1 = \quad \beta) t_2 = 3 t_1$$

Απάντηση

Θεωρούμε την εξίσωση της απομάκρυνσης του κινητού στην ταλάντωση 1 με την πιο απλή της μορφή $x_1 = A_1 \eta\mu\omega_1 t$ που ισχύει δια $t=0$, $x_1=0$ (στη Θ.Ι.) με θετική φορά προς τα αριστερά.

Για $x_1 = A_1/2$ βρίσκουμε το χρονικό διάστημα από $t=0$ μέχρι τη χρονική στιγμή που $x_1 = A_1/2$

$$A_1/2 = A_1 \eta\mu\omega_1 t_{A1/2} \Rightarrow \eta\mu\omega_1 t_{A1/2} = \frac{1}{2} \text{ και η μικρότερη γωνία } \omega_1 t_{A1/2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_1} t_{A1/2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow t_{A1/2} = \frac{T_1}{12} \text{ και } \Delta t_{(A1/2 \rightarrow A1)} = \frac{T_1}{4} - \frac{T_1}{12} = \frac{T_1}{6} \text{ . Άρα } \Delta t_{(A1 \rightarrow A1/2)} = t_1 = \frac{T_1}{6}$$

Το μέτρο της ταχύτητας είναι $u_{\max}/2$ πρώτη φορά μια στιγμή στο χρονικό διάστημα από A_1 μέχρι τη Θ.Ι. της ταλάντωσης 1 και δεύτερη φορά μια στιγμή στο χρονικό διάστημα από τη Θ.Ι. μέχρι το πλάτος A_2 της ταλάντωσης 2.

Θεωρούμε την εξίσωση της ταχύτητας του κινητού στην ταλάντωση 2 με την πιο απλή της μορφή $u_2 = \omega_2 A_2 \sigma\upsilon\nu\omega_2 t$ που ισχύει δια $t=0$, $x_2=0$ (στη Θ.Ι.) με θετική φορά προς τα δεξιά..

$$u_{\max}/2 = \omega_2 A_2 \sigma\upsilon\nu\omega_2 t_{u\max/2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega_2 t_{u\max/2} = 1/2 \text{ και η μικρότερη γωνία } \omega_2 t_{u\max/2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{T_2} t_{\text{umax}/2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_{\text{umax}/2} = \frac{T_2}{6} \quad \text{και από την ερώτηση B} \quad t_{\text{umax}/2} = \frac{T_1}{12}$$

$$\text{Άρα η χρονική στιγμή} \quad t_2 = \frac{T_1}{4} + \frac{T_1}{12} = \frac{T_1}{3}$$

Και η σχέση μεταξύ των t_1, t_2 είναι $t_2 = 2 t_1$ (το α)

Ε. Το χρονικό διάστημα Δt από τη στιγμή που η απομάκρυνση του σώματος στην ταλάντωση 1 έχει μέτρο $A_1/2$ για πρώτη φορά από τη στιγμή που το αφήσαμε, μέχρι τη στιγμή που το μέτρο της ταχύτητας του σώματος είναι $u = u_{\text{max}}/2$ για τρίτη φορά, από τη στιγμή που το αφήσαμε, είναι
α) $\Delta t = T_1/2$ β) $\Delta t = T_1/4$

Απάντηση.

$$\text{Με βάση την ερώτηση Δ : } \Delta t (A_1 \rightarrow A_1/2 \text{ για πρώτη φορά}) = \frac{T_1}{6}$$

Το μέτρο της ταχύτητας είναι $u_{\text{max}}/2$ πρώτη φορά μια στιγμή στο χρονικό διάστημα από A_1 μέχρι τη Θ.Ι. της ταλάντωσης 1, δεύτερη φορά μια στιγμή στο χρονικό διάστημα από τη Θ.Ι. μέχρι το πλάτος A_2 της ταλάντωσης 2 και τρίτη φορά μια στιγμή στο χρονικό διάστημα από το A_2 μέχρι τη Θ.Ι.

$$\text{Από την} \quad u_2 = u_{\text{max}} \sin \omega_2 t \quad \text{για} \quad u_2 = -u_{\text{max}}/2 \quad \text{έχουμε} \quad -u_{\text{max}}/2 = u_{\text{max}} \sin \omega_2 t_{\text{umax}/2} \Rightarrow \sin \omega_2 t_{\text{umax}/2} = -1/2 \quad \text{και η μικρότερη γωνία} \quad \omega_2 t_{\text{umax}/2} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_2} t_{\text{umax}/2} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_{\text{umax}/2} = \frac{T_2}{3}$$

$$\text{και από την ερώτηση B} \quad t_{\text{umax}/2} = \frac{T_1}{6}$$

$$\text{Άρα} \quad \Delta t (A_1 \rightarrow \Theta.Ι. \rightarrow u_{\text{max}}/2 \text{ για τρίτη φορά}) = \frac{T_1}{4} + \frac{T_1}{6} = \frac{5T_1}{12}$$

$$\text{Επομένως το} \quad \Delta t = \Delta t (A_1 \rightarrow \Theta.Ι. \rightarrow u_{\text{max}}/2 \text{ για τρίτη φορά}) - \Delta t (A_1 \rightarrow A_1/2 \text{ για πρώτη φορά}) = \frac{5T_1}{12} - \frac{T_1}{6} = T_1/4 \quad (\text{το β})$$

Ζ. Η χρονική στιγμή t_3 από την αρχή της κίνησης του σώματος, στην οποία η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου (1) είναι ίση με το ένα τέταρτο της ενέργειας των ταλαντώσεων για δεύτερη φορά, είναι :

$$\alpha) t_3 = T_1/3 \quad \beta) t_3 = 3T_1/8$$

Απάντηση

Στο χρονικό διάστημα από την αρχή της κίνησης μέχρι τη Θ.Ι. το κινητό εκτελεί την ταλάντωση 1

και τη χρονική στιγμή που $U_{\text{ελ}(1)} = \frac{1}{4} E$ ισχύει :

$$U_{\text{ελ}(1)} = \frac{1}{4} E = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} k A_1^2 \Rightarrow \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} k A_1^2 \Rightarrow x_1^2 = \frac{1}{4} A_1^2 \Rightarrow x_1 = \pm A_1/2.$$

Η χρονική στιγμή που $U_{ελ(1)} = \frac{1}{4} E$ για πρώτη φορά, είναι όταν το μέτρο της απομάκρυνσης $x_1 = A_1/2$ για πρώτη φορά.

Από τη Θ.Ι. μέχρι το πλάτος A_2 και στη συνέχεια από το πλάτος A_2 μέχρι τη Θ.Ι. το κινητό εκτελεί την ταλάντωση 2 και τη χρονική στιγμή που $U_{ελ(1)} = \frac{1}{4} E$ για δεύτερη φορά ισχύει $U_{ελ(1)} = \frac{1}{4} E \Rightarrow \frac{1}{2} kx_2^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} 4k A_2^2 \Rightarrow x_2 = A_2$.

Άρα η δεύτερη φορά που $U_{ελ(1)} = \frac{1}{4} E$ είναι στην ακραία θέση A_2

Άρα $t_3 = T_1/4 + T_2/4 = T_1/4 + T_1/8 = 2T_1/8 + T_1/8 = 3T_1/8$ (το β)

Η. Το έργο της δύναμης του ελατηρίου 1 από την αρχή της κίνησης μέχρι να μηδενιστεί για πρώτη φορά η ταχύτητα του σώματος, είναι $W_{Fελ.1}$ και το έργο του ελατηρίου 2 στο ίδιο διάστημα, είναι $W_{Fελ.2}$. Τα έργα έχουν σχέση

α) $W_{Fελ.2} = W_{Fελ.1}$ β) $W_{Fελ.2} = -W_{Fελ.1}$

Απάντηση

1^{ος} τρόπος.

$$W_{Fελ.1} = U_{ελ.1 \text{ αρχ.}} - U_{ελ.1 \text{ τελ.}} = \frac{1}{2} k A_1^2 - \frac{1}{2} k A_2^2 = 4 \frac{1}{2} k A_2^2 - \frac{1}{2} k A_2^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} k A_2^2$$

$$W_{Fελ.2} = U_{ελ.2 \text{ αρχ.}} - U_{ελ.2 \text{ τελ.}} = 0 - \frac{1}{2} 3k A_2^2 = -3 \cdot \frac{1}{2} k A_2^2$$

Άρα $W_{Fελ.2} = -W_{Fελ.1}$ (το β)

2^{ος} τρόπος.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από την αρχή της κίνησης μέχρι $u=0$ για πρώτη φορά.

$$\Delta K = W_{Fελ.1} + W_{Fελ.2} \Rightarrow 0 = W_{Fελ.1} + W_{Fελ.2} \Rightarrow W_{Fελ.2} = -W_{Fελ.1}$$

Θ. Όταν το μέτρο της ταχύτητας είναι $u_{\max}/2$ πρώτη φορά από την αρχή της κίνησης του σώματος, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας του είναι $\frac{dK_1}{dt}$ και όταν το μέτρο της ταχύτητας είναι $u_{\max}/2$ τρίτη φορά από την αρχή της κίνησης, ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου 2 είναι $\frac{dU_{ελ.2}}{dt}$. Η σχέση μεταξύ των $\frac{dU_{ελ.2}}{dt}$, $\frac{dK_1}{dt}$ είναι :

α) $\frac{dU_{ελ.2}}{dt} = -3 \frac{dK_1}{dt}$ β) $\frac{dU_{ελ.2}}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{dK_1}{dt}$

Απάντηση

Στο απειροελάχιστο χρονικό διάστημα dt που περιέχει τη χρονική στιγμή στη οποία το μέτρο της ταχύτητας είναι $u_{\max}/2$ πρώτη φορά από την αρχή της κίνησης, εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ.

$dK_1 = W_{F_{0\lambda}.(dt)} \Rightarrow dK_1 = |F_{\varepsilon\pi}| |dx_1|$ (Το έργο $W_{F_{0\lambda}.(dt)}$ είναι θετικό γιατί η μετατόπιση dx_1 είναι προς τα δεξιά και η $F_{0\lambda} = F_{\varepsilon\lambda.1}$ είναι προς τα δεξιά) $\Rightarrow dK_1 = k |x_{1(1)}| |dx_1|$

$$\text{Διαιρούμε τα μέλη της εξίσωσης με το } dt. \quad \frac{dK_1}{dt} = k |x_{1(1)}| \left| \frac{dx_1}{dt} \right| \Rightarrow \frac{dK_1}{dt} = k |x_{1(1)}| \left| \frac{u_{max}}{2} \right| \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΕ_{ταλ.1} μεταξύ της στιγμής που $x_1 = x_{1(1)}$, $u_1 = u_{max}/2$ και $x_1 = 0$, $u_1 = u_{max}$ (Θ.Ι.)

$$\frac{1}{2} k x_{1(1)}^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{u_{max}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} m u_{max}^2 \Rightarrow k x_{1(1)}^2 + m \frac{u_{max}^2}{4} = m u_{max}^2 \Rightarrow$$

$$k x_{1(1)}^2 = m u_{max}^2 - m \frac{u_{max}^2}{4} \Rightarrow k x_{1(1)}^2 = m \frac{3u_{max}^2}{4} \Rightarrow \sqrt{k} |x_{1(1)}| = \sqrt{m} \frac{\sqrt{3}u_{max}}{2}$$

$$\Rightarrow |x_{1(1)}| = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\sqrt{3}u_{max}}{2} \quad (2)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (1),(2)} \Rightarrow \frac{dK_1}{dt} = k \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\sqrt{3}u_{max}}{2} \left| \frac{u_{max}}{2} \right|$$

Στο απειροελάχιστο χρονικό διάστημα dt που περιέχει τη χρονική στιγμή στη οποία το μέτρο της ταχύτητας είναι $u_{max}/2$ τρίτη φορά από την αρχή της κίνησης, η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου (2) είναι αντίθετη του έργου της δύναμης του ελατηρίου (2) στο σώμα (συντηρητική δύναμη) $dU_{\varepsilon\lambda.2} = -W_{F_{\varepsilon\lambda.2}.(dt)} \Rightarrow dU_{\varepsilon\lambda.2} = -|F_{\varepsilon\lambda.2}| |dx_2|$ (Το έργο $W_{F_{\varepsilon\lambda.2} (dt)}$ είναι θετικό γιατί η μετατόπιση dx_2 είναι προς τα αριστερά και η $F_{\varepsilon\lambda.2}$ είναι προς τα αριστερά.) $\Rightarrow$

$$dU_{\varepsilon\lambda.2} = -3k |x_{2(1)}| |dx_2|$$

$$\text{Διαιρούμε τα μέλη της εξίσωσης με το } dt : \quad \frac{dU_{\varepsilon\lambda.2}}{dt} = -3k |x_{2(1)}| \left| \frac{dx_2}{dt} \right| \Rightarrow$$

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda.2}}{dt} = -3k |x_{2(1)}| \left| \frac{u_{max}}{2} \right| \quad (4)$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΕ_{ταλ.2} μεταξύ της στιγμής που $x_2 = x_{2(1)}$, $u_2 = u_{max}/2$ και $x_2 = 0$, $u_2 = u_{max}$ (Θ.Ι.)

$$\frac{1}{2} 4k x_{2(1)}^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{u_{max}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} m u_{max}^2 \Rightarrow 4k x_{2(1)}^2 + m \frac{u_{max}^2}{4} = m u_{max}^2 \Rightarrow$$

$$4k x_{2(1)}^2 = m u_{max}^2 - m \frac{u_{max}^2}{4} \Rightarrow 4k x_{2(1)}^2 = m \frac{3u_{max}^2}{4} \Rightarrow 2\sqrt{k} |x_{2(1)}| = \sqrt{m} \frac{\sqrt{3}u_{max}}{2}$$

$$\Rightarrow |x_{2(1)}| = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\sqrt{3}u_{max}}{4} \quad (5)$$

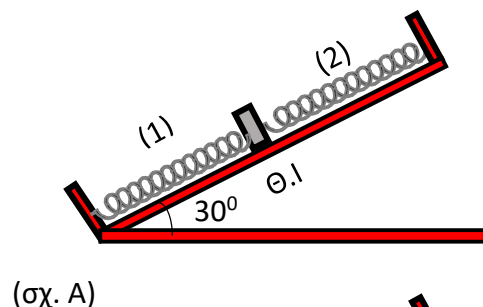
$$\text{Από τις σχέσεις (4),(5)} \Rightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda.2}}{dt} = -3k \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\sqrt{3}u_{max}}{4} \left| \frac{u_{max}}{2} \right| = -\frac{3}{2} k \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\sqrt{3}u_{max}}{2} \left| \frac{u_{max}}{2} \right|$$

$$\text{Και από τη σχέση (3)} \quad \frac{dU_{\varepsilon\lambda.2}}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{dK_1}{dt} \quad (\text{το } \beta)$$

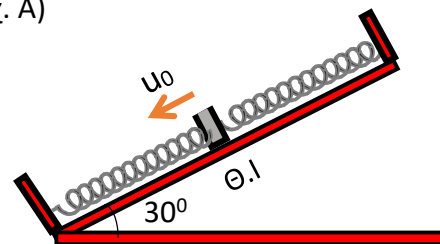
Εφαρμογή 3 –α

Το σώμα μάζας m είναι ακίνητο πάνω στο λείο πλάγιο επίπεδο κλίσης 30° , συνδέεται με το άκρο του ελατηρίου (1) και είναι σε επαφή με το άκρο του ελατηρίου (2). Τα ελατήρια (1), (2) έχουν σταθερές $k_1=k$, $k_2=3k$ αντίστοιχα, τα άλλα τους άκρα συνδέονται σε σταθερά σημεία και το ελατήριο (2) έχει το φυσικό του μήκος (Σχ. Α). Δίνουμε ταχύτητα μέτρου u_0 στο σώμα, στη διεύθυνση του πλάγιου επιπέδου προς τα κάτω. (Σχ. Β). Κατά την κίνηση του σώματος το μέγιστο μήκος που αποκτάει το ελατήριο (1) είναι το φυσικό του μήκος.

Ποιες από τις σχέσεις είναι σωστές και γιατί



(σχ. Α)



(σχ. Β)

Α. Το μέτρο της ταχύτητας u_0 είναι .

α) $u_0 = 2g \sqrt{\frac{m}{k}}$ β .) $u_0 = g \sqrt{\frac{m}{k}}$ (+ αιτιολόγηση)

Β. Το πλάτος της ταλάντωσης 1 όταν το σώμα κινείται σε σύνδεση με το ελατήριο (1) και δεν είναι σε επαφή με ο ελατήριο (2) , είναι

α .) $A_1 = mg/k$ β) $A_1 = 2mg/k$ (+ αιτιολόγηση)

Γ. Όταν η συσπίρωση του ελατηρίου (1) είναι $\Delta l = mg/k$, το μέτρο της δύναμης επαναφοράς του στο σώμα είναι $F_{επ.1}$. Όταν η συσπίρωση του ελατηρίου (2) είναι $\Delta l = mg/2k$ το μέτρο της δύναμης επαναφοράς στο σώμα του είναι $F_{επ.2}$. Η σχέση μεταξύ των $F_{επ.1}$, $F_{επ.2}$ είναι

α) $F_{επ.2} = 3 F_{επ1}$ β .) $F_{επ.2} = 4 F_{επ1}$ (+ αιτιολόγηση)

Δ. Η χρονική στιγμή που το μέτρο της ταχύτητας του κινητού είναι $u_0/2$ για πρώτη φορά από τη στιγμή που του δώσαμε ταχύτητα u_0 , είναι t_1 και η χρονική στιγμή που η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου (2) είναι μέγιστη για πρώτη φορά, είναι t_2 . Η σχέση μεταξύ των t_1 , t_2 είναι

α) $t_2 = 15t_1/2 =$ β .) $t_2 = 15 t_1 / 4$ (+ αιτιολόγηση)

Ε. Το χρονικό διάστημα Δt από τη στιγμή που η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται για πρώτη φορά μέχρι τη χρονική στιγμή που το μέτρο της απομάκρυνσης στη ταλάντωσης 2 (το σώμα συνδέεται με το ελατήριο (1) και είναι σε επαφή με το ελατήριο (2)) είναι $x_2 = \frac{mg}{2k}$ για δεύτερη φορά, είναι .

$$\alpha .) \Delta t = \frac{9}{4} \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \beta) \Delta t = \frac{11}{4} \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (+ \text{ αιτιολόγηση})$$

Ζ. Η χρονική στιγμή t_3 από τη στιγμή που δίνουμε ταχύτητα u_0 στο σώμα , στην οποία η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου (1) είναι ίση με το ένα τέταρτο της ενέργειας των ταλαντώσεων για τρίτη φορά, είναι :

$$\alpha) t_3 = \frac{5}{8} \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \beta .) t_3 = \frac{5}{4} \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (+ \text{ αιτιολόγηση})$$

Η. Το έργο της δύναμης του ελατηρίου 1 από τη στιγμή που δίνουμε ταχύτητα u_0 στο σώμα μέχρι να μηδενιστεί για δεύτερη φορά η ταχύτητα του σώματος ,είναι $W_{Fελ.1}$ και το έργο του ελατηρίου 2 στο ίδιο διάστημα , είναι $W_{Fελ.2}$. Τα έργα έχουν σχέση

$$\alpha .) W_{Fελ.2} = -3W_{Fελ.1} \quad \beta) W_{Fελ.2} = 3W_{Fελ.1} \quad (+ \text{ αιτιολόγηση})$$

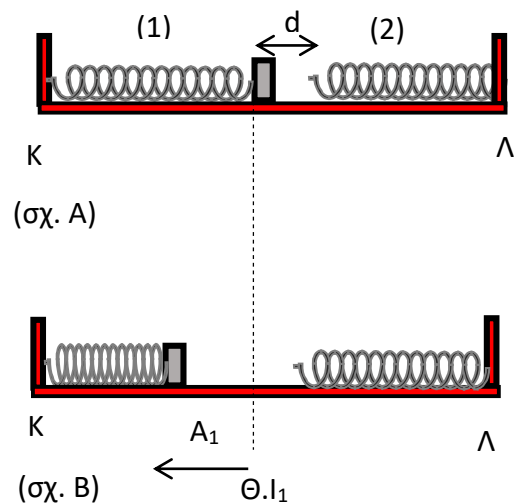
Θ. Όταν το μέτρο της ταχύτητας του σώματος είναι $u_0/2$ δεύτερη φορά από τη στιγμή που του δώσαμε ταχύτητα u_0 , ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσής του είναι $\frac{dU_{ταλ.}}{dt}$ και όταν το μέτρο της ταχύτητας είναι $u_0/2$ τρίτη φορά από τη στιγμή που του δώσαμε ταχύτητα u_0 , ,ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου 2 , είναι $\frac{dU_{ελ.2}}{dt}$.

Η σχέση μεταξύ των $\frac{dU_{ελ.2}}{dt}$, $\frac{dU_{ταλ.}}{dt}$ είναι :

$$\alpha) \frac{dU_{ελ.2}}{dt} = -3 \frac{dU_{ταλ.}}{dt} \quad \beta .) \frac{dU_{ελ.2}}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{dU_{ταλ.}}{dt} \quad (+ \text{ αιτιολόγηση})$$

Εφαρμογή 3-β

Τα οριζόντια ελατήρια (1), (2) με σταθερές $k_1=k$, $k_2=3k$ αντίστοιχα, συνδέονται με τα κατακόρυφα τοιχώματα τα οποία είναι στερεωμένα στα άκρα Κ,Λ του λείου οριζόντιου επιπέδου. Το ελατήριο (1) συνδέεται με το ακίνητο σώμα και το αριστερό άκρο του ελατηρίου (2) απέχει d από το σώμα (σχ. Α). Μετατοπίζουμε το σώμα αριστερά κατά $A_1=\sqrt{3}d$ και το αφήνουμε. (σχ. Β).



Ποιες από τις σχέσεις είναι σωστές και γιατί.

Α. Το πλάτος της ταλάντωσης 2, όταν το σώμα κινείται σε σύνδεση με το ελατήριο (1) και είναι σε επαφή με ο ελατήριο (2), είναι.

α.) $A_2 = \frac{1}{4}d$ β.) $A_2 = \frac{3}{4}d$ (+ αιτιολόγηση)

Β. Το έργο της δύναμης του ελατηρίου 1 από τη στιγμή που αφήνουμε το σώμα μέχρι να μηδενιστεί για πρώτη φορά η ταχύτητά του, είναι $W_{F_{ελ.1}}$ και το έργο του ελατηρίου 2 στο ίδιο διάστημα, είναι $W_{F_{ελ.2}}$. Τα έργα έχουν σχέση

α.) $W_{F_{ελ.2}} = -W_{F_{ελ.1}}$ β.) $W_{F_{ελ.2}} = W_{F_{ελ.1}}$ (+ αιτιολόγηση)

Γ. Μία στιγμή πριν πέσει το σώμα στο άκρο του ελατηρίου 2, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ταλάντωσής του είναι $\frac{dK}{dt}(-)$ και τη στιγμή που πέφτει στο άκρο του ελατηρίου 2, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ταλάντωσής του είναι $\frac{dK}{dt}(+)$.

Η σχέση μεταξύ των $\frac{dK}{dt}(-)$, $\frac{dK}{dt}(+)$ είναι :

α.) $\frac{dK}{dt}(-) = \frac{dK}{dt}(+)$ β.) $\frac{dK}{dt}(-) \neq \frac{dK}{dt}(+)$ (+ αιτιολόγηση)

pananasiannis@yahoo.gr

