

ΕΙΔΗ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Είναι η κυκλική κίνηση στην οποία το κινητό σε ίσα χρονικά διαστήματα διανύει ίσα τόξα και η επιβατική ακτίνα διαγράφει ίσες γωνίες. Από τον ορισμό προκύπτουν τρία συμπεράσματα.

- 1) Το πηλίκο $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ είναι σταθερό και από τη σχέση $u_{\gamma\rho.} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας είναι σταθερό $u_{\gamma\rho.} = \text{σταθ.}$
- 2) Το πηλίκο $\frac{\Delta \theta}{\Delta t}$ είναι σταθερό και από τη σχέση $\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$ το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι σταθερό $\omega = \text{σταθ.}$ Επειδή η διεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου διατηρείται σταθερή και η φορά της η οποία εξαρτάται από τη φορά περιστροφής, διατηρείται επίσης σταθερή, το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας είναι σταθερό $\vec{\omega} = \text{σταθ.}$
- 3) Επειδή το κινητό διαγράφει το τόξο κάθε κύκλου σε ίσα χρονικά διαστήματα, η κίνηση είναι περιοδική. Ο χρόνος για κάθε κύκλο ονομάζεται περίοδος T .

ΜΕΓΕΘΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ – ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΟΔΟΣ T είναι ο χρόνος που γίνεται μία φορά η περιοδική κίνηση – το περιοδικό φαινόμενο.

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ f είναι ο αριθμός των επαναλήψεων N της κίνησης – του φαινομένου που γίνεται σε χρόνο t προς το χρόνο αυτό t . $f = \frac{N}{t}$ και για $N=1$, $f = \frac{1}{T}$ (Μονάδες μέτρησης $1\text{Hz} = 1\text{ s}^{-1}$)

Στην ομαλή κυκλική κίνηση τα μέτρα της γραμμικής και της γωνιακής ταχύτητας σε σχέση με τα μεγέθη περίοδος- συχνότητα είναι:

$$u_{\gamma\rho.} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{ή πιο απλά} \quad u_{\gamma\rho.} = \frac{s}{t} \quad \Rightarrow \quad u_{\gamma\rho.} = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f$$

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad \text{ή πιο απλά} \quad \omega = \frac{\theta}{t} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

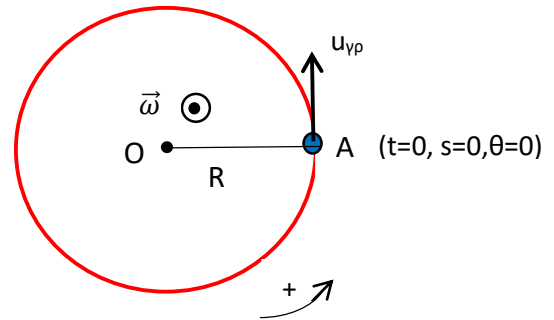
$$\text{Αντικαθιστώντας το } \omega = 2\pi f \text{ στη σχέση } u_{\gamma\rho.} = 2\pi R f \Rightarrow u_{\gamma\rho.} = \omega R$$

Στην ΟΚΚ ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας (επιτρόχιος επιτάχυνση) είναι

μηδέν, επειδή το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας είναι σταθερό και το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι σταθερό $a_k = \frac{u_{\gamma\rho}^2}{R} = \omega^2 R = \text{σταθ.}$ επειδή τα μέτρα των $\vec{u}_{\gamma\rho}$, $\vec{\omega}$ είναι σταθερά.

ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΠΡΟΣ ΤΑ ΘΕΤΙΚΑ

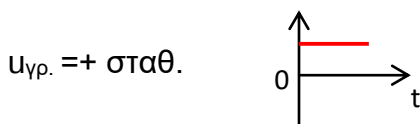
Το μικρό σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση προς τη θετική φορά την οποία έχουμε επιλέξει. Θεωρούμε ως θετική φορά την αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα βρίσκεται στο σημείο A. Από το σημείο A αρχίζουν να μετρούν το τόξο s που διανύει το σώμα και η αντίστοιχη γωνία θ που διαγράφει η επιβατική ακτίνα. Το πρόσημο στα μέτρα του τόξου s και της γωνίας θ είναι θετικό. Οι αλγεβρικές τιμές της γραμμικής ταχύτητας και της γωνιακής ταχύτητας είναι θετικές και σταθερές. Η θετική φορά της γωνιακής ταχύτητας, με βάση τον κανόνα της δεξιάς παλάμης, είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου προς τα έξω. Η θετική φορά της γωνιακής ταχύτητας συμβολίζεται με ένα μικρό κύκλο και μία τελεία. (πιο κάτω ο μικρός κύκλος με το $\times$ δείχνει ότι τα διάνυσμα είναι κάθετο στο επίπεδο του κύκλου και έχει φορά προς τα μέσα)



Εξισώσεις

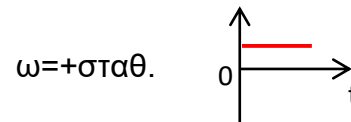
ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟ ΤΟΞΟ s

1) Γραμμική ταχύτητα $u_{\gamma\rho}(t)$

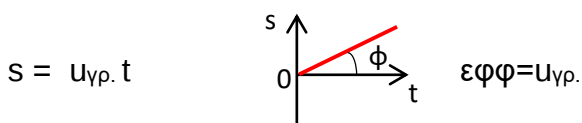


ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΓΩΝΙΑ θ

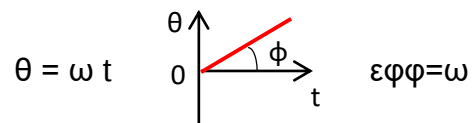
1) Γωνιακή ταχύτητα $\omega(t)$

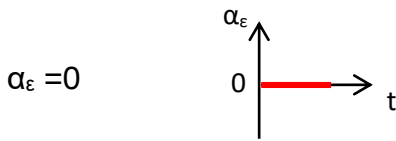
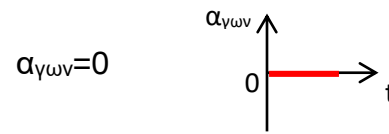
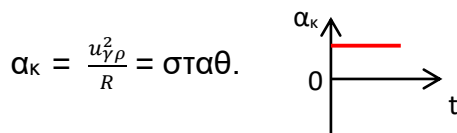
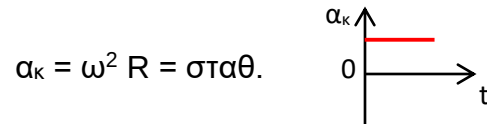


2) Τόξο $s(t)$

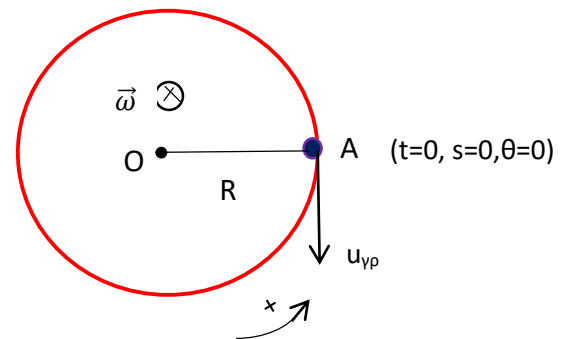
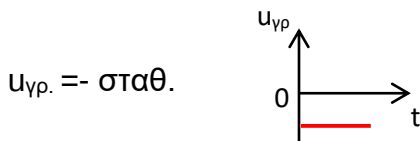
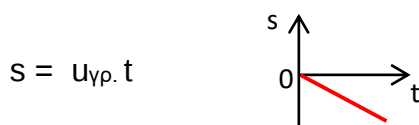
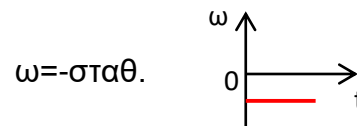
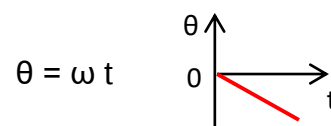


2) Γωνία $\theta(t)$

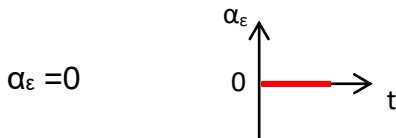


3) Επιτρόχιος επιτάχυνση $\alpha_\epsilon(t)$ 3) Γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}(t)$ 4) Κεντρομόλος επιτάχυνση $\alpha_\kappa(t)$ 4) Κεντρομόλος επιτάχυνση $\alpha_\kappa(t)$ **ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΠΡΟΣ ΤΑ ΑΡΝΗΤΙΚΑ**

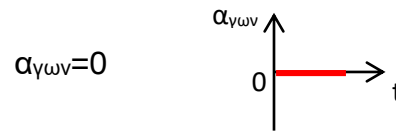
Το σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση προς την αντίθετη φορά από τη θετική φορά που έχουμε επιλέξει. Η κίνησή του είναι προς τα αρνητικά και οι αλγεβρικές τιμές των $u_{\gamma\rho}$, ω είναι αρνητικές και σταθερές. Με βάση τον κανόνα της δεξιάς παλάμης η φορά της ω είναι προς τα μέσα. Τα πρόσημα στα μέτρα των s , θ είναι αρνητικά. Η κεντρομόλος επιτάχυνση α_κ έχει πάντα θετική αλγεβρική τιμή γιατί στους τύπους τα μεγέθη $u_{\gamma\rho}$, ω είναι στο τετράγωνο.

**Εξισώσεις****ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟ ΤΟΞΟ s** 1) Γραμμική ταχύτητα $u_{\gamma\rho}(t)$ 2) Τόξο $s(t)$ **ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΓΩΝΙΑ θ** 1) Γωνιακή ταχύτητα $\omega(t)$ 2) Γωνία $\theta(t)$ 

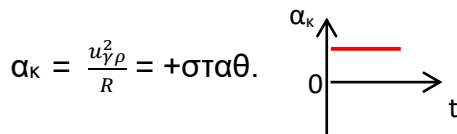
3) Επιτρόχιος επιτάχυνση $\alpha_\epsilon(t)$



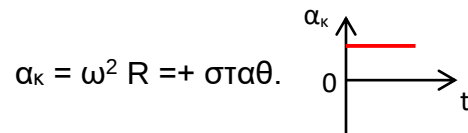
3) Γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}(t)$



4) Κεντρομόλος επιτάχυνση $\alpha_\kappa(t)$



4) Κεντρομόλος επιτάχυνση $\alpha_\kappa(t)$



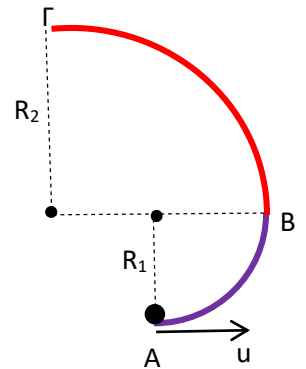
Παράδειγμα 1

Το μικρό σώμα κινείται με γραμμική ταχύτητα σταθερού μέτρου u στην εσωτερική επιφάνεια της στεφάνης AB ακτίνας $R_1=1\text{m}$ και συνεχίζει με γραμμική ταχύτητα σταθερού ίδιου μέτρου u , στην εσωτερική επιφάνεια της στεφάνης BΓ ακτίνας $R_2 = 2\text{m}$. Αν το χρονικό διάστημα της κίνησης του σώματος από το σημείο Α στο σημείο Γ είναι $t_{A\Gamma} = 0,5\pi \text{ s}$ να βρεθούν:

α) Το μέτρο της ταχύτητας u .

β) Τα μέτρα των γωνιακών ταχυτήτων των κινήσεων από το Α στο Β και από το Β στο Γ.

γ) Τα μέτρα των κεντρομόλων επιταχύνσεων των κινήσεων από το Α στο Β και από το Β στο Γ.



Απάντηση

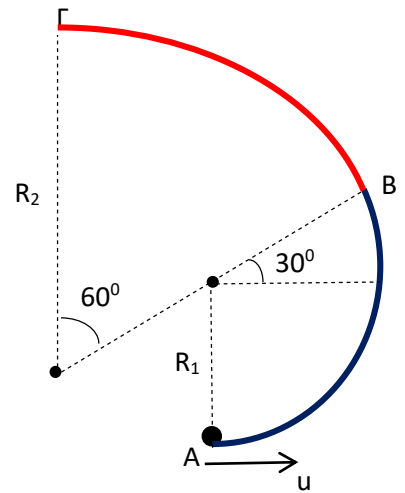
$$\alpha) \quad t_{A\Gamma} = t_{AB} + t_{B\Gamma} = \frac{2\pi R_1}{4u} + \frac{2\pi R_2}{4u} \Rightarrow t_{A\Gamma} = \frac{2\pi 3R_1}{4u} \Rightarrow u = \frac{2\pi 3R_1}{4t_{A\Gamma}} \Rightarrow u = 3\text{m/s}$$

$$\beta) \quad \omega_{AB} = \frac{u}{R_1} \Rightarrow \omega_{AB} = 3 \text{ rad/s} \quad , \quad \omega_{B\Gamma} = \frac{u}{R_2} \Rightarrow \omega_{B\Gamma} = 1,5 \text{ rad/s}$$

$$\gamma) \quad \alpha_{\kappa(AB)} = \frac{u^2}{R_1} \Rightarrow \alpha_{\kappa(AB)} = 9 \text{ m/s}^2 \quad , \quad \alpha_{\kappa(B\Gamma)} = \frac{u^2}{R_2} \Rightarrow \alpha_{\kappa(B\Gamma)} = 4,5 \text{ m/s}^2$$

Εφαρμογή 1

Το μικρό σώμα κινείται με γραμμική ταχύτητα σταθερού μέτρου u στην εσωτερική επιφάνεια της στεφάνης AB ακτίνας $R_1=1\text{m}$ και συνεχίζει με γραμμική ταχύτητα σταθερού, ίδιου μέτρου u , στην εσωτερική επιφάνεια της στεφάνης BΓ ακτίνας $R_2 = 2\text{m}$. Στο τόξο AB αντιστοιχεί γωνία 120° και στο τόξο BΓ αντιστοιχεί γωνία 60° . Αν το χρονικό διάστημα της κίνησης του σώματος από το σημείο Α μέχρι το σημείο Γ είναι $t_{AG} = \frac{\pi}{3} \text{ s}$ να βρείτε:

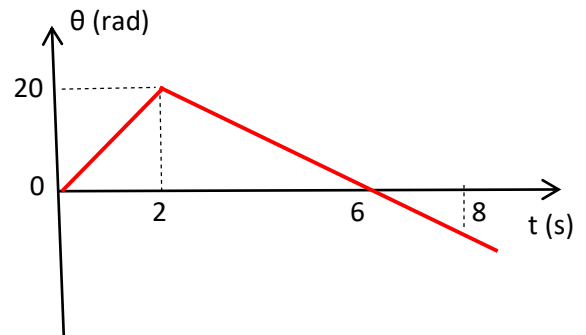


- Το μέτρο της ταχύτητας u . (Απ. $u=4\text{m/s}$)
- Τα μέτρα των γωνιακών ταχυτήτων των κινήσεων από το Α στο Β και από το Β στο Γ. (Απ. $\omega_{AB} = 4 \text{ rad/s}$, $\omega_{B\Gamma} = 2\text{rad/s}$)
- Τα μέτρα των κεντρομόλων επιταχύνσεων των κινήσεων από το Α στο Β και από το Β στο Γ. (Απ. $\alpha_{κ(AB)} = 16 \text{ m/s}^2$, $\alpha_{κ(B\Gamma)} = 8 \text{ m/s}^2$)

Παράδειγμα 2

Μικρό σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση. Η γωνία περιστροφής του κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από το διπλανό σχήμα. Να βρεθούν .

- Οι διαδοχικές κινήσεις του κινητού.
- Οι γωνιακές ταχύτητες του κινητού.
- Η γωνιακή μετατόπιση του κινητού από $t=1\text{s}$ μέχρι $t=8\text{s}$
- Ο αριθμός των στροφών του κινητού από $t=1\text{s}$ μέχρι $t=8\text{s}$



Απάντηση

- Από $t=0$ μέχρι $t=2\text{s}$ το κινητό εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση προς τη θετική φορά και από $t=2\text{s}$

και μετά το κινητό εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση προς τη αρνητική φορά.

β) Στο χρονικό διάστημα $t=0$ μέχρι $t=2s$: $\omega_1 = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \omega_1 = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta t} \Rightarrow \omega_1 = \frac{20-0}{2} \Rightarrow \omega_1 = 10 \text{ rad/s}$

Στο χρονικό διάστημα $t=2s$ και μετά $\omega_2 = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \omega_2 = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta t} \Rightarrow \omega_2 = \frac{0-20}{4} \Rightarrow \omega_2 = -5 \text{ rad/s}$

γ) $\Delta\theta_{1 \rightarrow 8} = \Delta\theta_{1 \rightarrow 2} + \Delta\theta_{2 \rightarrow 8} = \omega_1 (2-1) + \omega_2 (8-2) = 10 (2-1) - 5 (8-2) = -10 \text{ rad}$

δ) Η συνολική γωνία περιστροφής και προς τα θετικά και προς τα αρνητικά είναι:

$$\Delta\theta_{1 \rightarrow 8} = \Delta\theta_{1 \rightarrow 2} + \Delta\theta_{2 \rightarrow 8} = \omega_1 (2-1) + \omega_2 (8-2) = 10 (2-1) + 5 (8-2) = 30 \text{ rad}$$

Ο αριθμός των στροφών είναι $N = \frac{\Delta\theta_{1 \rightarrow 8}}{2\pi} = \frac{30}{2\pi} = \frac{15}{\pi}$ στροφές

Εφαρμογή 2

Μικρό σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση. Η γωνία περιστροφής του κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από το διπλανό σχήμα. Να βρεθούν .

α) Οι διαδοχικές κινήσεις του κινητού.

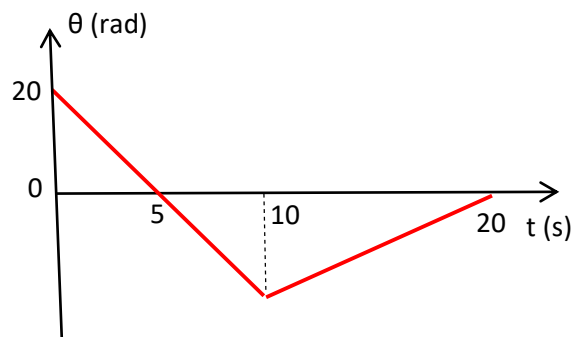
β) Οι γωνιακές ταχύτητες του κινητού.

γ) Η γωνιακή μετατόπιση του κινητού από $t=2s$ μέχρι $t=18s$

δ) Ο αριθμός των στροφών του κινητού από $t=2s$ μέχρι $t=18s$

[α) Απ. Από $t=0$ μέχρι $t=4s$ το κινητό εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση προς τη αρνητική φορά και από $t=4s$ μέχρι $t=8s$ το κινητό εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση προς τη θετική φορά

β) Απ. $\omega_1 = -4 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 2 \text{ rad/s}$ γ) $\Delta\theta_{2 \rightarrow 18} = -12 \text{ rad}$ δ) $N = 24/\pi$ στροφές]

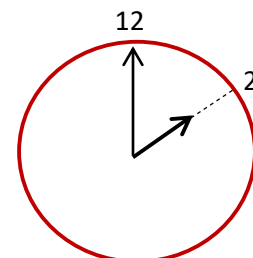


Παράδειγμα 3

Το ρολόι δείχνει δύο ακριβώς. Μετά από πόσο χρονικό διάστημα ο λεπτοδείκτης και ο ωροδείκτης

α) σχηματίζουν γωνία 90° για πρώτη φορά

ΠΑΝΑΝΑΣ ΓΙΑΝΝΗΣ ΦΥΣΙΚΟΣ



β) βρίσκονται σε ευθεία γραμμή για πρώτη φορά

γ) σχηματίζουν γωνία 90° για δεύτερη φορά

Απάντηση

α)

Από το σχήμα η διαφορά των γωνιών

$\theta_\Lambda - \theta_\Omega = \pi/2 + \pi/3 = 5\pi/6$ Όμως $\theta_\Lambda = \omega_\Lambda t$ και $\theta_\Omega = \omega_\Omega t$

Άρα $\omega_\Lambda t - \omega_\Omega t = 5\pi/6 \Rightarrow t(\omega_\Lambda - \omega_\Omega) = 5\pi/6$ (1)

Η διαφορά $\omega_\Lambda - \omega_\Omega = 2\pi/12h - 2\pi/1h = 22\pi/12h$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow t(22\pi/12h) = 5\pi/6 \Rightarrow t = \frac{10}{22}h$

β)

Από το σχήμα η διαφορά των γωνιών

$\theta_\Lambda - \theta_\Omega = \pi + \pi/3 = 4\pi/3$ Όμως $\theta_\Lambda = \omega_\Lambda t$ και $\theta_\Omega = \omega_\Omega t$

Άρα $\omega_\Lambda t - \omega_\Omega t = 4\pi/3 \Rightarrow t(\omega_\Lambda - \omega_\Omega) = 4\pi/3$ (3)

(3),(2) $\Rightarrow t(22\pi/12h) = 4\pi/3 \Rightarrow t = \frac{8}{11}h$

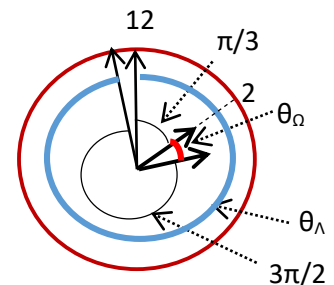
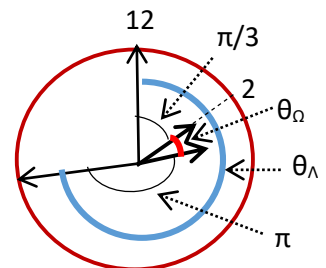
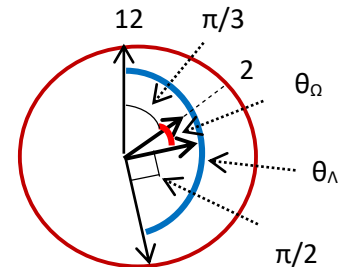
γ)

Από το σχήμα η διαφορά των γωνιών

$\theta_\Lambda - \theta_\Omega = 3\pi/2 + \pi/3 = 11\pi/6$ Όμως $\theta_\Lambda = \omega_\Lambda t$ και $\theta_\Omega = \omega_\Omega t$

Άρα $\omega_\Lambda t - \omega_\Omega t = 11\pi/6 \Rightarrow t(\omega_\Lambda - \omega_\Omega) = 11\pi/6$ (4)

(4),(2) $\Rightarrow t(22\pi/12h) = 11\pi/6 \Rightarrow t = 1h$



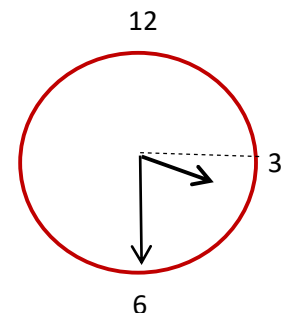
Εφαρμογή 3

Το ρολόι δείχνει τρείς και μισή. Μετά από πόσο χρονικό διάστημα ο λεπτοδείκτης και ο ωροδείκτης

α) σχηματίζουν γωνία 90° για πρώτη φορά.

β) βρίσκονται σε ευθεία γραμμή για πρώτη φορά

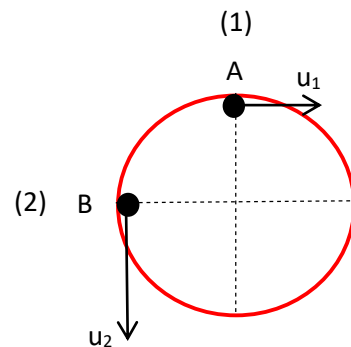
γ) ταυτίζονται για πρώτη φορά.



(Απ. α) $t = \frac{1}{22} \text{ h}$ β) $t = \frac{7}{22} \text{ h}$ γ) $t = \frac{19}{22} \text{ h}$)

Παράδειγμα 4

Τα μικρά σώματα (1),(2) εκτελούν ομαλές κυκλικές κινήσεις στο ίδιο κύκλο. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το κινητό (1) διέρχεται από το σημείο Α και το κινητό (2) διέρχεται από το σημείο Β με φορές που φαίνονται στο σχήμα. Η γωνία που αντιστοιχεί στο μεγάλο τόξο από το Α στο Β είναι $3\pi/2$. Αν θεωρήσουμε ότι η γωνία αρχίζει να μετράει από το σημείο Α ,με θετική φορά τη φορά του σώματος (1) και $\omega_1 = \pi \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 2\pi \text{ rad/s}$ να βρεθούν:



- α) Η χρονική στιγμή που συναντώνται για πρώτη φορά τα σώματα
- β) Οι γωνιακές μετατοπίσεις $\Delta\theta$ από $t=0$ μέχρι τη στιγμή της πρώτης συνάντησης.
- γ) Η χρονική στιγμή που συναντώνται για δέκατη φορά τα σώματα
- δ) Σε κοινό διάγραμμα $\theta-t$ οι γραφικές παραστάσεις των γωνιών που διαγράφουν οι επιβατικές ακτίνες των κινητών, μέχρι τη χρονική στιγμή της συνάντησης.

Απάντηση

α) Οι εξισώσεις των γωνιών σε συνάρτηση με το χρόνο που αντιστοιχούν στις κινήσεις των σωμάτων

$$\text{είναι : } \theta_1 = \omega_1 t \Rightarrow \theta_1 = \pi t \quad \text{και} \quad \theta_2 = \theta_0 + \omega_2 t \Rightarrow \theta_2 = 3\pi/2 - 2\pi t$$

Τη στιγμή της συνάντησης ισχύει: $\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \pi t_\sigma = 3\pi/2 - 2\pi t_\sigma$

$$\Rightarrow 3\pi t_\sigma = 3\pi/2 \Rightarrow t_\sigma = 0,5 \text{ s}$$

$$\beta) \Delta\theta_1 = \omega_1 \Delta t \Rightarrow \Delta\theta_1 = \omega_1 (t_\sigma - 0) \Rightarrow \Delta\theta_1 = \pi \cdot 0,5 \Rightarrow \Delta\theta_1 = \pi/2 \text{ rad}$$

$$\Delta\theta_2 = \omega_2 \Delta t \Rightarrow \Delta\theta_2 = \omega_2 (t_\sigma - 0) \Rightarrow \Delta\theta_2 = -2\pi \cdot 0,5 \Rightarrow \Delta\theta_2 = -\pi \text{ rad}$$

γ) Από την πρώτη μέχρι τη δεύτερη συνάντηση ο χρόνος είναι $\Delta t_{(1 \rightarrow 2)}$ και το άθροισμα των απόλυτων τιμών των γωνιακών μετατοπίσεων είναι 2π .

$$|\Delta\theta_1| + |\Delta\theta_2| = 2\pi \Rightarrow |\omega_1 \Delta t_{(1 \rightarrow 2)}| + |\omega_2 \Delta t_{(1 \rightarrow 2)}| = 2\pi$$

$$\Rightarrow \pi \Delta t_{(1 \rightarrow 2)} + 2\pi \Delta t_{(1 \rightarrow 2)} = 2\pi \Rightarrow 3\pi \Delta t_{(1 \rightarrow 2)} = 2\pi \Rightarrow \Delta t_{(1 \rightarrow 2)} = \frac{2}{3} \text{ s}$$

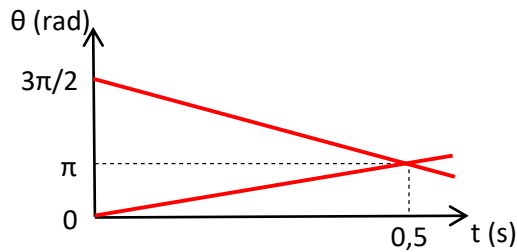
$$\text{Από την πρώτη μέχρι τη δέκατη συνάντηση} \quad \Delta t_{(1 \rightarrow 10)} = 9 \Delta t_{(1 \rightarrow 2)} \Rightarrow \Delta t_{(1 \rightarrow 10)} = 9 \cdot \frac{2}{3} \text{ s}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{(1 \rightarrow 10)} = 6 \text{ s}$$

Άρα από $t=0$ μέχρι τη δέκατη συνάντηση ο χρόνος είναι :

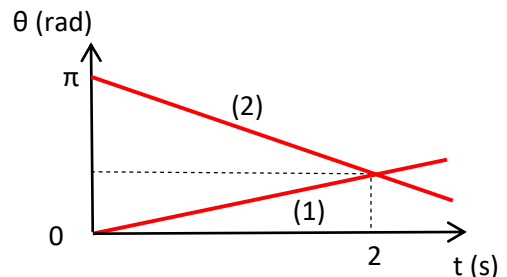
$$t_{(0 \rightarrow 10 \text{ η συν.})} = t_{\sigma} + \Delta t_{(1 \rightarrow 10)} = 0,5 + 6 \Rightarrow t_{(0 \rightarrow 10 \text{ η συν.})} = 6,5 \text{ s}$$

δ)



Εφαρμογή 4

Δύο κινητά (1), (2) εκτελούν ομαλές κυκλικές κινήσεις στο ίδιο κύκλο. Οι γωνίες περιστροφής τους σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνονται στο διάγραμμα. Αν το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του (2), ω_2 είναι τετραπλάσιο από το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του (1), ω_1 να βρείτε:



α) Τα μέτρα των γωνιακών ταχυτήτων των κινητών.

$$(\text{Απ. } \omega_1 = 0,1\pi \text{ rad/s, } \omega_2 = 0,4\pi \text{ rad/s})$$

β) Τις γωνιακές μετατοπίσεις $\Delta\theta$ των κινητών από $t=0$ μέχρι τη στιγμή της πρώτης συνάντησης

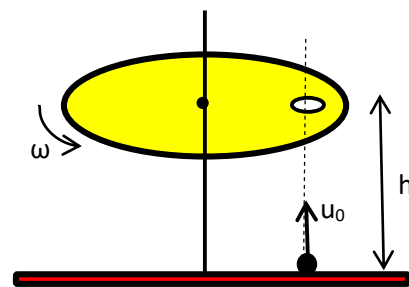
$$(\text{Απ. } \Delta\theta_1 = 0,2\pi \text{ rad, } \Delta\theta_2 = -0,8\pi \text{ rad})$$

γ) Τη χρονική στιγμή που συναντώνται τα σώματα για δέκατη πέμπτη φορά.

$$(\text{Απ. } t_{(0 \rightarrow 15 \text{ η συν.})} = 58 \text{ s})$$

Παράδειγμα 5 (Ο.Κ.Κ και Βολές)

Ο δίσκος βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 5\pi \text{ rad/s}$ γύρω από κατακόρυφο άξονα χωρίς τριβές. Ο δίσκος έχει μια μικρή τρύπα και το κέντρο του είναι σε ύψος h από το δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t=0$ εκτοξεύεται από το δάπεδο μικρό σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου u_0 και η τρύπα είναι ακριβώς από πάνω. Το σώμα διέρχεται από την τρύπα ανεβαίνοντας όταν ο δίσκος έχει κάνει μία στροφή και κατεβαίνοντας όταν έχει κάνει τρεις στροφές από τη στιγμή $t=0$.



Να βρείτε

- Την αρχική ταχύτητα u_0
- Το ύψος h
- Το μέγιστο ύψος $h_{\max}$ του σώματος.
- Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν διέρχεται από την τρύπα.

Απάντηση

Η περίοδος της ΟΚΚ του δίσκου είναι $T = 2\pi/\omega = 0,4\text{s}$.

Το σώμα διέρχεται από την τρύπα ανεβαίνοντας με ταχύτητα μέτρου u_1 τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,4\text{s}$.

Κατεβαίνοντας τη χρονική στιγμή $t_2 = 3 \cdot 0,4\text{s} = 1,2\text{s}$

έχει ταχύτητα μέτρου πάλι u_1 γιατί σύμφωνα με την

ΑΔΜΕ ισχύει $\frac{1}{2} m u_0^2 = \frac{1}{2} m u_1^2 + mgh$ είτε ανεβαίνοντας

είτε κατεβαίνοντας.

α) Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας ανεβαίνοντας είναι $u_1 = u_0 - g t_1$ (1)

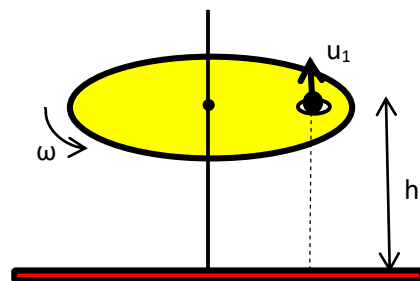
και κατεβαίνοντας

$$-u_1 = u_0 - g t_2 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1),(2) : $0 = 2u_0 - g (t_1 + t_2) \Rightarrow 2u_0 = g (t_1 + t_2)$

$$\Rightarrow 2u_0 = 10 (0,4 + 1,2) \Rightarrow u_0 = 8\text{m/s}$$

β) $h = u_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow h = 8 \cdot 0,4 - \frac{1}{2} 10 (0,4)^2 \Rightarrow h = 2,4\text{m}$

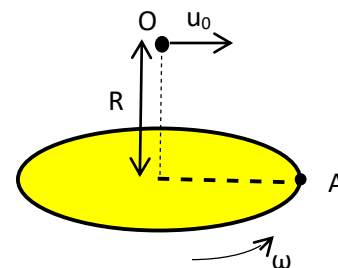


$$\gamma)) \quad h_{\max} = \frac{u_0^2}{2g} = \frac{64}{20} = 3,2\text{m}$$

$$\delta) \text{ Από τη σχέση (1) } \Rightarrow u_1 = u_0 - g t_1 = 8 - 10 \cdot 0,4 = 4\text{m/s}$$

Εφαρμογή 5

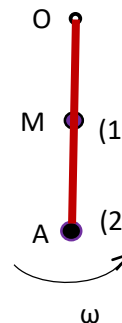
.Ο δίσκος ακτίνας R στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Το σημείο O βρίσκεται σε ύψος R από το κέντρο του δίσκου. Μικρό σώμα βάλλεται οριζόντια από το σημείο O με ταχύτητα μέτρου u_0 προς τα δεξιά και ταυτόχρονα το σημείο A του δίσκου βρίσκεται στο δεξί άκρο της περιφέρειάς του. Αν το μέτρο $u_0 = 4\pi g/\omega$ το σώμα θα συναντήσει το σημείο A αφού ο δίσκος έχει κάνει



α) Μία στροφή β) Δύο στροφές γ.) Τέσσερις στροφές. (+ αιτιολόγηση)

Παράδειγμα 6

Η αβαρής ράβδος στρέφεται γύρω από άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της O κάθετα στη ράβδο, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω . Στο μέσο της M είναι κολλημένο μικρό σώμα (1) και στο άκρο της A είναι κολλημένο μικρό σώμα (2). Η κεντρομόλος επιτάχυνση του σώματος (1) έχει μέτρο $a_{κ(1)} = 25\text{m/s}^2$ και η γραμμική ταχύτητα του σώματος (2) έχει μέτρο $u_{γρ.(2)} = 10\text{m/s}$. Να βρείτε



- Τη γωνιακή ταχύτητα ω
- Τη γραμμική ταχύτητα του σώματος (1)
- Την κεντρομόλο επιτάχυνση του σώματος (2)

Απάντηση

α) Έστω $OM=MA=r$

$$a_{κ(1)} = \omega^2 r \Rightarrow 25 = \omega^2 r \quad (1) , \quad u_{γρ.(2)} = \omega 2r \Rightarrow 10 = \omega 2r \Rightarrow \omega r = 5 \quad (2)$$

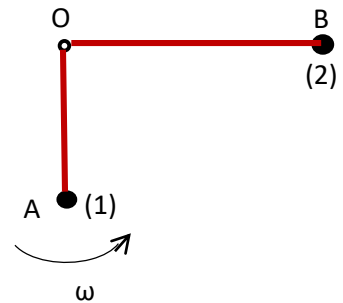
$$(1),(2) \Rightarrow 25 = \omega \omega r = \omega 5 \Rightarrow \omega = 5\text{rad/s}$$

β) $u_{γρ.(1)} = \omega r$ και λόγω της σχέσης (2) $u_{γρ.(1)} = 5\text{ m/s}$

γ) $\alpha_{κ(2)} = \omega^2 2r$ και λόγω της (1) $\alpha_{κ(2)} = 50 \text{ m/s}^2$

Εφαρμογή 6

Οι αβαρείς ράβδοι OA, OB είναι κολλημένες κάθετα μεταξύ τους στο σημείο O και από το σημείο O διέρχεται άξονας κάθετα στις ράβδους. Στα σημεία A, B είναι κολλημένα μικρά σώματα (1), (2). Οι ράβδοι στρέφονται γύρω από τον άξονα χωρίς τριβές με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω . Η κεντρομόλος επιτάχυνση του σώματος (1) έχει μέτρο $\alpha_{κ(1)} = 15 \text{ m/s}^2$ και η κεντρομόλος επιτάχυνση του σώματος (2) έχει μέτρο $\alpha_{κ(2)} = 20 \text{ m/s}^2$. Το μήκος $AB = 1 \text{ m}$.



Να βρείτε

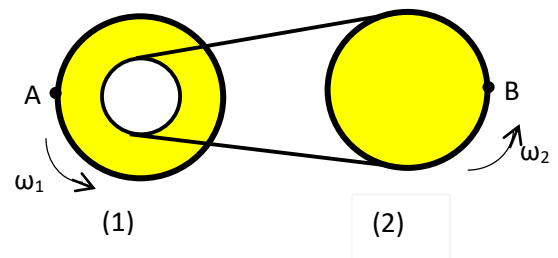
- α) Τη γωνιακή ταχύτητα ω ($\omega = 5 \text{ rad/s}$)
- β) Τη γραμμική ταχύτητα του σώματος (1) ($u_{γρ.(1)} = 3 \text{ m/s}$)
- γ) Τη γραμμική ταχύτητα του σώματος (2) ($u_{γρ.(2)} = 4 \text{ m/s}$)

Παράδειγμα 7

Οι δίσκοι (1), (2) είναι στο ίδιο επίπεδο. Ο δίσκος (1) είναι διπλός με αυλάκι σε ακτίνα R και περιφέρεια σε ακτίνα $2R$. Ο δίσκος (2) έχει αυλάκι σε ακτίνα $2R$. Στα αυλάκια των δίσκων είναι περασμένος ιμάντας και οι δίσκοι στρέφονται με σταθερές γωνιακές ταχύτητες, χωρίς να ολισθαίνει ο ιμάντας. Τα μέτρα των κεντρομόλων επιταχύνσεων των σημείων A, B των περιφερειών των δίσκων είναι $\alpha_{κ.(A)}, \alpha_{κ.(B)}$.

Η σχέση μεταξύ των $\alpha_{κ.(A)}, \alpha_{κ.(B)}$ είναι

- α) $\alpha_{κ.(A)} = 2\alpha_{κ.(B)}$. β) $\alpha_{κ.(A)} = 4\alpha_{κ.(B)}$. (+ αιτιολόγηση)



Απάντηση

Οι ταχύτητες όλων των σημείων του ιμάντα και των σημείων επαφής τους με τα αυλάκια, έχουν το

ίδιο μέτρο. Άρα οι γραμμικές ταχύτητες των σημείων σε ακτίνα R στον δίσκο (1) και οι γραμμικές ταχύτητες των σημείων σε ακτίνα $2R$ στο δίσκο (2), έχουν το ίδιο μέτρο.

$u_{\gamma\rho.1(R)} = \omega_1 R$ και $u_{\gamma\rho.2(2R)} = \omega_2 2R$ με ω_1, ω_2 τις σταθερές γωνιακές ταχύτητες των δίσκων.

$$\text{Από } u_{\gamma\rho.1(R)} = u_{\gamma\rho.2(2R)} \Rightarrow \omega_1 R = \omega_2 2R \Rightarrow \omega_1 = 2\omega_2 \quad (1)$$

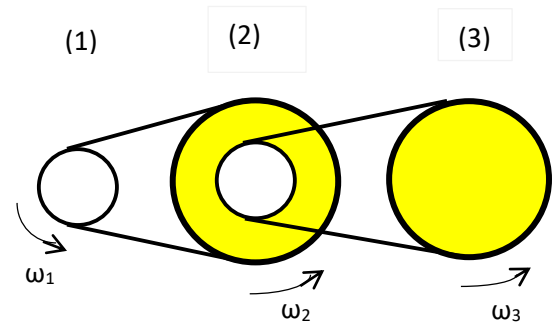
$$\alpha_{\kappa.(A)} = \omega_1^2 2R \text{ και από τη σχέση (1) } \Rightarrow \alpha_{\kappa.(A)} = 4\omega_2^2 2R \quad (2)$$

$$\alpha_{\kappa.(B)} = \omega_2^2 2R \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow \alpha_{\kappa.(A)} = 4 \alpha_{\kappa.(B)} \quad (\text{το } \beta)$$

Εφαρμογή 7

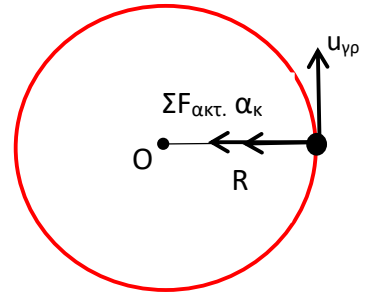
Οι δίσκοι (1), (2), (3) είναι στο ίδιο επίπεδο. Ο δίσκος (1) έχει αυλάκι στην περιφέρεια σε ακτίνα R , ο δίσκος (2) είναι διπλός με αυλάκι σε ακτίνα R και αυλάκι στη περιφέρεια σε ακτίνα $2R$ και ο δίσκος (3) έχει αυλάκι σε ακτίνα $2R$. Στα αυλάκια των δίσκων είναι περασμένοι ιμάντες και οι δίσκοι στρέφονται με σταθερές γωνιακές ταχύτητες χωρίς να ολισθαίνουν οι ιμάντες, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα μέτρα των γωνιακών ταχυτήτων τους είναι $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ αντίστοιχα. Η σχέση μεταξύ των $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ είναι



$$\alpha) \omega_1 = \omega_2 + \omega_3 \quad \beta) \omega_1 = 2\omega_2 + \omega_3 \quad \gamma.) \omega_1 = \omega_2 + 2\omega_3 \quad (+ \text{ αιτιολόγηση})$$

ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ – ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ ΔΥΝΑΜΗ

Στην ομαλή κυκλική κίνηση η επιτάχυνση του σώματος ισούται με την κεντρομόλο επιτάχυνσή του $\vec{a}_κ$, η οποία βρίσκεται πάνω στη διεύθυνση της ακτίνας και κατευθύνεται προς το κέντρο του κύκλου. Επομένως από το Β Νόμο και η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα, θα βρίσκεται πάνω στη διεύθυνση της ακτίνας με φορά προς το κέντρο του κύκλου.



$$\Sigma F_{\alpha\kappa\tau.} = m a_{\kappa} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_{\alpha\kappa\tau.} = m \frac{u_{\gamma\rho}^2}{R} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_{\alpha\kappa\tau.} = m \omega^2 R$$

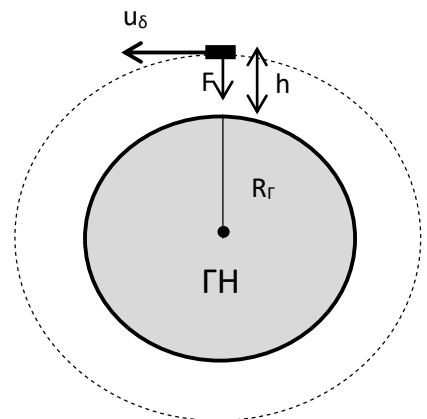
Το γινόμενο $m a_{\kappa}$ ονομάζεται κεντρομόλος δύναμη $F_{\kappa} = m a_{\kappa}$ η οποία (όπως έχει αναφερθεί και σε άλλη σελίδα) δεν αποτελεί κάποια νέα δύναμη στη φύση αλλά η συνισταμένη κάποιων γνωστών μας δυνάμεων στη φύση στη διεύθυνση της ακτίνας με φορά προς το κέντρο του κύκλου, παίζει το ρόλο και άρα ισούται με την κεντρομόλο δύναμη.

Άρα κάθε φορά παίρνουμε τη σειρά: $\Sigma F_{\alpha\kappa\tau.} = F_{\kappa} \Rightarrow \Sigma F_{\alpha\kappa\tau.} = m a_{\kappa} \Rightarrow$

$$\Sigma F_{\alpha\kappa\tau.} = m \frac{u_{\gamma\rho}^2}{R} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_{\alpha\kappa\tau.} = m \omega^2 R$$

Παράδειγμα 1

Τεχνητός δορυφόρος βρίσκεται σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Στο δορυφόρο ασκείται η ελκτική δύναμη από τη Γη η οποία υπολογίζεται από το νόμο της παγκόσμιας έλξης $F = G \frac{M_{\Gamma} m_{\delta}}{(R_{\Gamma} + h)^2}$ όπου M_{Γ} , m_{δ} οι μάζες Γης, δορυφόρου, R_{Γ} η ακτίνα της Γης και G η σταθερή του νόμου. Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας του δορυφόρου σε συνάρτηση με το ύψος του.



Απάντηση

Η μόνη δύναμη που ασκείται στο δορυφόρο είναι η ελκτική δύναμη από τη Γη . Η δύναμη αυτή F παίζει το ρόλο κεντρομόλου δύναμης.

$$F = F_k \Rightarrow G \frac{M_\Gamma m_\delta}{(R_\Gamma + h)^2} = m_\delta \frac{u_\delta^2}{R_\Gamma + h} \Rightarrow u_\delta^2 = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h} \Rightarrow u_\delta = \sqrt{G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h}}$$

Εφαρμογή 1

Μαθητής ο οποίος βρίσκεται στον ισημερινό έχει βάρος W . Όταν ο μαθητής ζυγίζεται ,η ζυγαριά δείχνει τη δύναμη N' από το μαθητή στη ζυγαριά (η οποία με μηχανισμό τη μετατρέπει σε αντίστοιχα Kg με βάση τη σχέση $W=mg$) Η N' είναι αντίθετη της κάθετης αντίδρασης N από τη ζυγαριά στο μαθητή (Δράση – Αντίδραση). Το μέτρο της δύναμης N' είναι :

α) $N' > W$ β) $N' = W$ γ) $N' < W$ (Να αιτιολογήσετε)

(Απ. η γ)

Παράδειγμα 2

Το σώμα μάζας $m=1\text{Kg}$ το οποίο συνδέεται με το ένα άκρο οριζόντιου αβαρούς, μη ελαστικού νήματος , εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το άλλο άκρο του νήματος μήκους $l=1\text{m}$ συνδέεται με σταθερό κατακόρυφο άξονα ο οποίος περιστρέφεται μαζί με το νήμα χωρίς τριβές. Η τάση του νήματος είναι $T=16\text{N}$.

Να βρεθούν

α) Η γραμμική ταχύτητα του σώματος

β) Η συχνότητα της περιοδικής κίνησης.

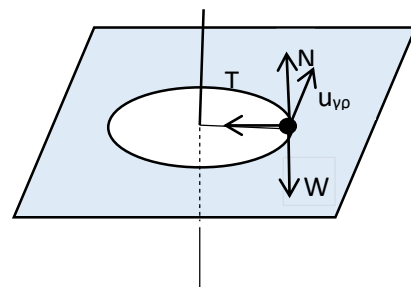
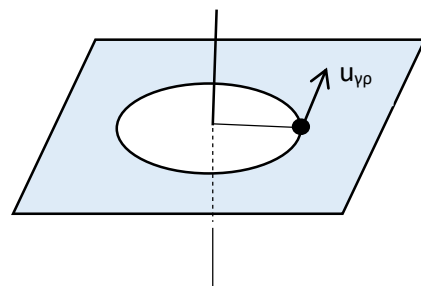
Απάντηση

Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις το βάρος W , η κάθετη αντίδραση N και η τάση του νήματος στη διεύθυνση της ακτίνας του κύκλου προς το κέντρο του T .

Κατακόρυφα ισχύει : $\Sigma F_{\text{κατ.}} = 0 \Rightarrow N = W$

α) Στη διεύθυνση της ακτίνας ισχύει:

ΠΑΝΑΝΑΣ ΓΙΑΝΝΗΣ ΦΥΣΙΚΟΣ



$$\Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = F_{\kappa} \Rightarrow T = m a_{\kappa} \Rightarrow 16 = 1 \cdot a_{\kappa} \Rightarrow a_{\kappa} = 16 \text{ m/s}^2$$

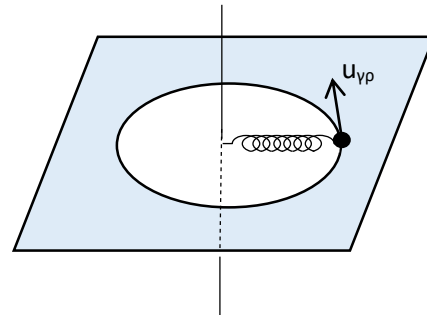
$$\text{Όμως } a_{\kappa} = \frac{u_{\gamma\rho}^2}{R} \Rightarrow 16 = \frac{u_{\gamma\rho}^2}{1} \Rightarrow u_{\gamma\rho} = 4 \text{ m/s}$$

$$\beta) u_{\gamma\rho} = 2\pi R f \Rightarrow 4 = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{2}{\pi} \text{ Hz}$$

Εφαρμογή 2

Το σώμα μάζας $m = 1 \text{ Kg}$ που συνδέεται με το ένα άκρο οριζόντιου αβαρούς ελατηρίου, εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το άλλο άκρο του ελατηρίου σταθεράς $k = 40 \text{ N/m}$ και επιμήκυνσης $\Delta l = 0,1 \text{ m}$ συνδέεται με σταθερό κατακόρυφο άξονα ο οποίος περιστρέφεται μαζί με το ελατήριο χωρίς τριβές. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος είναι $u_{\gamma\rho} = 2 \text{ m/s}$. Να βρεθούν

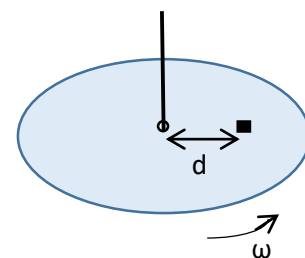
- α) Η κεντρομόλος δύναμη (Απ. $F_{\kappa} = 4 \text{ N}$)
- β) Η γωνιακή ταχύτητα του σώματος. (Απ. $\omega = 2 \text{ rad/s}$)
- γ) Το φυσικό μήκος του ελατηρίου (Απ. $l_0 = 0,9 \text{ m}$)



Παράδειγμα 3

Ο οριζόντιος δίσκος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Πάνω στο δίσκο και σε απόσταση $d = 0,5 \text{ m}$ από το κέντρο του, είναι τοποθετημένο μικρών διαστάσεων σώμα μάζας $m = 1 \text{ Kg}$. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος-δίσκου είναι $\mu = 0,8$ και η μάζα του σώματος είναι $m = 0,2 \text{ Kg}$.

- α) Να βρεθεί η μέγιστη σταθερή γωνιακή ταχύτητα με την οποία μπορεί να περιστρέφεται ο δίσκος, για να μην ολισθαίνει το σώμα πάνω στο δίσκο.
- β) Σε ποια μέγιστη απόσταση $d_{\max}$ πρέπει να είναι τοποθετημένο το σώμα για να μην ολισθαίνει πάνω στο δίσκο, αν η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου- σώματος ήταν $\omega = 2\sqrt{2} \text{ rad/s}$
- γ) Αν η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου σώματος ήταν $\omega = 5 \text{ rad/s}$ και τοποθετούσαμε το σώμα σε απόσταση $d_{\max}/4$, χωρίς να ολισθαίνει. ποιο θα ήταν το μέτρο της στατικής τριβής στο σώμα;

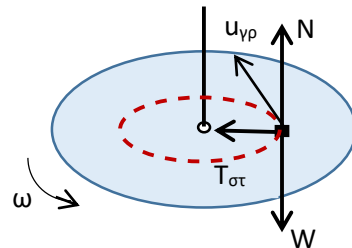


Απάντηση

- α) Επειδή το σώμα λόγω της αδράνειάς του τείνει να κινηθεί προς τα έξω (στη διεύθυνση της ταχύτητάς του) αναπτύσσεται στατική τριβή στη διεύθυνση της ακτίνας του κύκλου, προς το κέντρο του.

Η στατική τριβή παίζει το ρόλο κεντρομόλου δύναμης.

$$T_{στ} = m a_k \Rightarrow T_{στ} = m \omega^2 d$$



Η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα $\omega_{\max}$ αντιστοιχεί στη μέγιστη στατική τριβή (Οριακή στατική τριβή)

$$T_{στ, \max} = m \omega_{\max}^2 d \quad \text{όμως} \quad T_{στ, \max} = \mu N \quad \text{ή} \quad T_{στ, \max} = \mu W \quad (\text{λόγω του Β Νόμου κατακόρυφα } N=W)$$

$$\text{Άρα} \quad \mu W = m \omega_{\max}^2 d \Rightarrow \mu mg = m \omega_{\max}^2 d \Rightarrow \mu g = \omega_{\max}^2 d$$

$$\Rightarrow 0,8 \cdot 10 = \omega_{\max}^2 \cdot 0,5 \Rightarrow \omega_{\max}^2 = 16 \Rightarrow \omega_{\max} = 4 \text{ rad/s}$$

β) Η μέγιστη απόσταση $d_{\max}$ αντιστοιχεί στη μέγιστη στατική τριβή, με δεδομένη τη γωνιακή ταχύτητα.

$$T_{στ, \max} = m \omega^2 d_{\max} \Rightarrow \mu mg = m \omega^2 d_{\max} \Rightarrow \mu g = \omega^2 d_{\max} \Rightarrow$$

$$0,8 \cdot 10 = (2\sqrt{2})^2 \cdot d_{\max} \Rightarrow d_{\max} = 1\text{m}$$

$$\gamma) T_{στ} = m a_k \Rightarrow T_{στ} = m \omega^2 d_{\max}/4 \Rightarrow T_{στ} = 0,2 \cdot 5^2 \cdot 0,25 \Rightarrow T_{στ} = \frac{5}{4} \text{ N}$$

Εφαρμογή 3

Όχημα μάζας $m=600\text{Kg}$ μπαίνει σε οριζόντια στροφή δρόμου που είναι τμήμα της περιφέρειας κύκλου ακτίνας $R=25\text{m}$. Ο συντελεστής τριβής που έχουν τα λάστιχα του οχήματος με την επιφάνεια του δρόμου είναι $\mu=0,4$.

α) Ποιο είναι το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας του οχήματος $u_{\max}$ για να κινηθεί στη στροφή με ομαλή κυκλική κίνηση; (Απ. $u_{\max} = 10\text{m/s}$)

β) Αν το μέτρο της ταχύτητας του οχήματος ήταν $u = u_{\max}/2$ και το όχημα έκανε ομαλή κυκλική κίνηση στη στροφή, ποιο θα ήταν το μέτρο της στατικής τριβής που θα ασκούσαν στο όχημα.

$$(\text{Απ. } T_{στ} = 600\text{N})$$

γ) Αν το όχημα έμπαινε σε μια άλλη στροφή με ταχύτητα μέτρου $u = 8\text{m/s}$ και έκανε ομαλή κυκλική κίνηση, ποια θα έπρεπε να ήταν η ελάχιστη ακτίνα της στροφής για να μην εκτροχιαστεί το όχημα; Ο συντελεστής τριβής είναι $\mu=0,4$ (Απ. $R= 16\text{m}$)

Παράδειγμα 4

Η κυλινδρική επιφάνεια μπορεί να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων που αποτελούν τις βάσεις του κυλίνδρου. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της σταθερής γωνιακής ταχύτητας που πρέπει να έχει η επιφάνεια για να μην πέφτει μια μικρή σφαίρα που είναι σε επαφή με ένα σημείο της επιφάνειας και να κινείται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Δίνονται η ακτίνα του κύκλου $R=0,4\text{m}$ και ο συντελεστής τριβής μεταξύ μικρής σφαίρας και επιφάνειας $\mu=1$.

Απάντηση

Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις το βάρος W , η στατική τριβή προς τα πάνω και η κάθετη αντίδραση N προς το κέντρο του κύκλου O , λόγω αδράνειας.

Θεωρούμε οριζόντιο άξονα x με θετική φορά προς το κέντρο του κύκλου O και κατακόρυφο άξονα ψ .

Εφαρμόζουμε το Β Νόμο στους άξονες:

$$\Sigma F_x = m a_k \Rightarrow N = m \omega^2 R \quad (1)$$

$$\Sigma F_\psi = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} - W = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} = mg \quad (2)$$

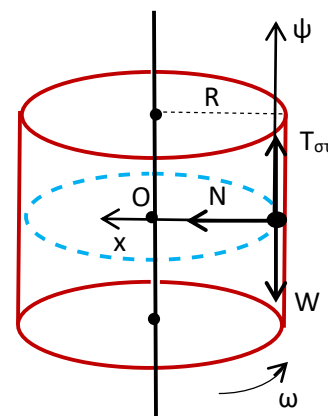
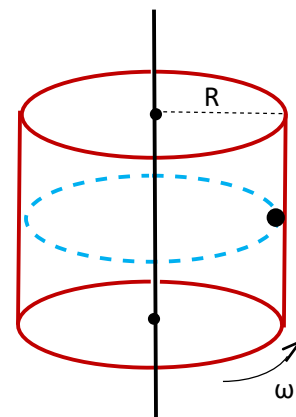
$$\text{Από τη σχέση } T_{\sigma\tau, \text{op}} = \mu N \text{ με αντικατάσταση της } N \text{ από τη σχέση (1)} \Rightarrow T_{\sigma\tau, \text{op}} = \mu m \omega^2 R \quad (3)$$

Με βάση τη σχέση (3) κάθε τιμή της γωνιακής ταχύτητας διαμορφώνει μία τιμή της μέγιστης στατικής τριβής. Η ελάχιστη γωνιακή ταχύτητα διαμορφώνει την ελάχιστη τιμή της μέγιστης στατικής τριβής η οποία δεν μπορεί να είναι μικρότερη από το βάρος, σύμφωνα με τη σχέση (2), γιατί το σώμα θα έπεφτε.

$$\text{Άρα } T_{\sigma\tau, \text{op}}(\min) = \mu m \omega(\min)^2 R = mg \Rightarrow \mu \omega(\min)^2 R = g \Rightarrow \omega(\min)^2 \cdot 0,4 = 10 \Rightarrow \omega(\min)^2 = 25$$

$$\omega(\min) = 5 \text{ rad/s}$$

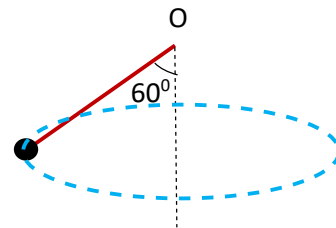
Για τιμές της γωνιακής ταχύτητας μεγαλύτερες από την τιμή 5 rad/s η $T_{\sigma\tau, \text{op}}$ είναι μεγαλύτερη από το βάρος και η κυλινδρική επιφάνεια μπορεί να περιστρέφεται για όλες τις τιμές της γωνιακής ταχύτητας από 5 rad/s μέχρι την τιμή που έχουμε επιλέξει, χωρίς να πέφτει το σώμα.



Εφαρμογή 4

Το μικρό σώμα το οποίο συνδέεται με το ένα άκρο του αβαρούς μη ελαστικού νήματος, εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε οριζόντιο επίπεδο. Το άλλο άκρο του νήματος μήκους $l=0,8\text{m}$ συνδέεται στο σταθερό σημείο O και το νήμα σχηματίζει γωνία 60° με την κατακόρυφη διεύθυνση. Να βρεθεί το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του σώματος.

(Απ. $\omega=5\text{ rad/s}$)



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Σώμα εκτελεί Ο.Κ.Κ. Ποια από τις προτάσεις – σχέσεις είναι λάθος.

α) Η γραφική παράσταση της γωνίας που διαγράφει η επιβατική γωνία του κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο, διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) $T = \frac{2\pi t}{\theta}$

γ) $a_k = a_{\gamma\rho} \cdot \omega$

δ) $f = \frac{u_{\gamma\rho}}{2\pi R^2}$

2. Σώμα εκτελεί Ο.Κ.Κ. Ποια από τις σχέσεις είναι λάθος.

α) $F_k = m 4 \pi^2 f^2 R$

β) $K = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2$

γ) $F_k = \frac{K}{R}$

δ) $K = \frac{1}{2} m u_{\gamma\rho} \cdot \omega R$

3. Σώμα εκτελεί Ο.Κ.Κ. Το σώμα διέρχεται από ένα σημείο Α για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή $t=0$ και τη Ν- στη φορά τη χρονική στιγμή $t=t_1$. Ποιες από τις προτάσεις -σχέσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

α) Τη χρονική στιγμή $2t_1$ το κινητό έχει κάνει $2N$ στροφές.

β) $f = \frac{N-1}{t_1}$

γ) $u_{γρ.} = 2 \frac{N-1}{t_1} R$

δ) Τη χρονική στιγμή $\frac{t_1}{N}$ το τόξο που διανύει το κινητό είναι $S = 2\pi R$

ε) Τη χρονική στιγμή $\frac{t_1}{N-1}$ η γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα του κινητού είναι $\theta = 2\pi \text{ rad}$.

4. Το κινητό (1) εκτελεί ΟΚΚ κίνηση στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας R_1 και το κινητό (2) εκτελεί ΟΚΚ κίνηση στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας R_2 . Τα μέτρα των κεντρομόλων επιταχύνσεων των κινητών είναι ίσα και στο χρονικό διάστημα Δt η σχέση μεταξύ των τόξων που διανύουν είναι $\Delta S_1 = 2\Delta S_2$. Ποια από τις σχέσεις είναι λάθος.

α) $u_{γρ.1} = 2u_{γρ.2}$

β) $\omega_2 = 2\omega_1$

γ) $R_1 = 4R_2$

δ) Στο χρονικό διάστημα Δt η σχέση μεταξύ των γωνιών διαγράφουν οι επιβατικές ακτίνες των κινητών είναι $\Delta\theta_1 = 2\Delta\theta_2$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΜΕ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

1. Κινητό εκτελεί ΟΚΚ. Το κινητό σε χρόνο t_1 διανύει τόξο S_1 και σε χρόνο $t_2 = 2t_1$ η επιβατική του ακτίνα διαγράφει γωνία θ_2 . Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του κινητού είναι

α) $a_k = \frac{S_1\theta_2}{2t_1^2}$ β) $a_k = \frac{S_1\theta_2}{t_1^2}$ (+ αιτιολόγηση)

2. Κινητό εκτελεί ΟΚΚ₍₁₎ σε μισή περιφέρεια κύκλου ακτίνας $2R$ και μετά ΟΚΚ₍₂₎ σε μισή περιφέρεια κύκλου ακτίνας R . Οι γραμμικές ταχύτητες των κινήσεων (1),(2) του κινητού έχουν ίσα μέτρα.

Α. Η σχέση μεταξύ των συχνοτήτων των κινήσεων (1) , (2) είναι

α) $f_1 = 2f_2$ β) $f_2 = 2f_1$ (+ αιτιολόγηση)

B. Η σχέση μεταξύ των μέτρων των κεντρομόλων επιταχύνσεων των κινήσεων (1) , (2) είναι

α) $a_{κ1} = 2a_{κ2}$ β) $a_{κ2} = 2a_{κ1}$ (+ αιτιολόγηση)

3. Το ρολόι δείχνει τρεις ακριβώς. Μετά από χρόνο t_1 οι δείκτες σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 60° για πρώτη φορά και μετά από χρόνο t_2 οι δείκτες σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 60° για δεύτερη φορά. Η σχέση μεταξύ των t_1, t_2 είναι

α) $t_2 = 3t_1$ β) $t_2 = 5t_1$ (+ αιτιολόγηση)

4. Σε κυκλικό στίβο κινούνται δύο αθλητές (1) ,(2) με σταθερές ταχύτητες μέτρων u_1, u_2 με $u_1 = 2u_2$.

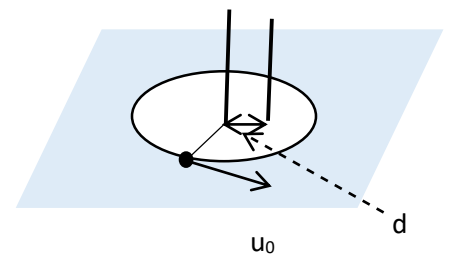
Οι αθλητές διέρχονται από την ίδια θέση Α του στίβου την ίδια χρονική στιγμή. Όταν οι αθλητές κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση θα συναντηθούν για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή t_1 . Όταν οι αθλητές κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις θα συναντηθούν για δεύτερη φορά τη χρονική στιγμή t_2 . Η σχέση μεταξύ των χρόνων t_1, t_2 είναι.

α) $t_1 = 3t_2$ β) $t_1 = 3t_2 / 2$ (+ αιτιολόγηση)

5

Το μικρό σώμα είναι ακίνητο πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο, συνδέεται με το ένα άκρο του οριζόντιου, τεντωμένου μη ελαστικού νήματος μήκους l . Το άλλο άκρο του νήματος συνδέεται με κατακόρυφο άξονα, ο οποίος περιστρέφεται μαζί με το νήμα χωρίς τριβές. Σε απόσταση $d = l/2$ από τον άξονα και παράλληλα σε αυτόν είναι στερεωμένη στο επίπεδο λεπτή ράβδος. Δίνουμε στο σώμα αρχική ταχύτητα μέτρου u_0 κάθετα στο νήμα. Η τάση του νήματος πριν φτάσει στη λεπτή ράβδο είναι T_1 και αφού φτάσει είναι T_2 . Η σχέση μεταξύ των T_1, T_2 είναι

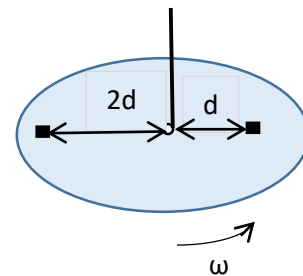
α) $T_1 = 2 T_2$ β) $T_2 = 2 T_1$ (+ αιτιολόγηση)



6.

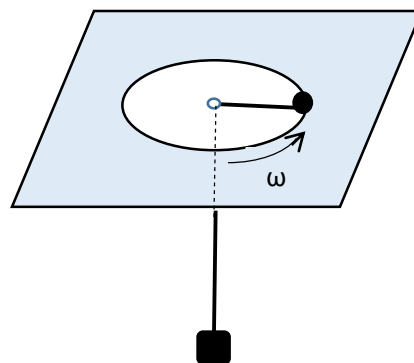
Ο οριζόντιος δίσκος περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Πάνω στο δίσκο και σε αποστάσεις d , $2d$ από το κέντρο του, στρέφονται μαζί του χωρίς να ολισθαίνουν, τα μικρών διαστάσεων σώματα (1),(2). Τα σώματα έχουν τις ελάχιστες τιμές των συντελεστών τριβής τους $\mu_{1(\epsilon\lambda.)}$, $\mu_{2(\epsilon\lambda.)}$, με το δίσκο για να μην ολισθαίνουν. Η σχέση μεταξύ των $\mu_{1(\epsilon\lambda.)}$, $\mu_{2(\epsilon\lambda.)}$ είναι

α) $\mu_{1(\epsilon\lambda.)} = 2 \mu_{2(\epsilon\lambda.)}$ β) $\mu_{2(\epsilon\lambda.)} = 2 \mu_{1(\epsilon\lambda.)}$ (+ αιτιολόγηση)



7

Το μικρό σώμα συνδέεται με το άκρο του οριζοντίου τμήματος του αβαρούς, μη ελαστικού νήματος και στρέφεται πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο σε κυκλική τροχιά σταθερής ακτίνας με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Το νήμα διέρχεται από τη μικρή τρύπα του επιπέδου και το κατακόρυφο τμήμα του συνδέεται με σώμα μάζας M . Στην επαφή του νήματος με την τρύπα δεν υπάρχουν τριβές. Αντικαθιστούμε το σώμα M με M' , διπλασιάζουμε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας, χωρίς να αλλάξουμε το μήκος του οριζοντίου τμήματος του νήματος και το μικρό σώμα εκτελεί πάλι ΟΚΚ.

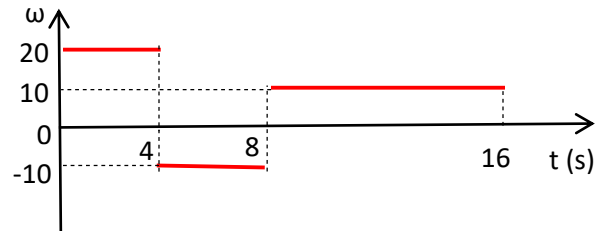


Η μάζα M' είναι

α) $M' = 2M$ β) $M' = 4M$ (+ αιτιολόγηση)

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από το διάγραμμα. Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ η αρχική γωνία είναι $\theta_0=0$



Να βρείτε

- α) Τις γωνίες τις οποίες έχει διαγράψει η επιβατική ακτίνα του κινητού τις χρονικές στιγμές $t_1=2s$, $t_2=6s$, $t_3=12s$.
 - β) Τη γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$ του κινητού από $t=0$ μέχρι $t=16s$
 - γ) Τη γραφική παράσταση της γωνίας που διαγράφει η επιβατική ακτίνα του κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο
 - δ) Τη γραφική παράσταση του μέτρου της κεντρομόλου επιτάχυνσης του κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο. Η ακτίνα του κύκλου είναι $R=1m$.
2. Τρεις αθλητές (1), (2), (3) διέρχονται ταυτόχρονα από την ίδια θέση κυκλικού στίβου ακτίνας $R=60\pi$ m με σταθερές ταχύτητες προς την ίδια κατεύθυνση, τη χρονική στιγμή $t=0$. Κατά σειρά συναντώνται για πρώτη φορά ο αθλητής (1) με τον αθλητή (2) τη χρονική στιγμή $t=10$ min και τη δεύτερη φορά οι τρεις αθλητές στην ίδια θέση, τη χρονική στιγμή $t=20$ min. Αν τα μέτρα των ταχυτήτων u_2, u_3 είναι $u_2 > u_3$ και το μέτρο της μικρότερης ταχύτητας από τις τρεις είναι 4m/s να βρείτε
- α) Τα μέτρα των ταχυτήτων των αθλητών
 - β) Τις στροφές που κάνει κάθε αθλητής μεταξύ δύο διαδοχικών θέσεων, που συναντώνται και οι τρεις μαζί.
3. Σώμα μάζας $m=1Kg$ εκτελεί ΟΚΚ σε περιφέρεια κύκλου $R=0,25$ m, πάνω σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο με τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα ω_{max} . Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη σταθερού μέτρου $F=4N$ κάθετη στην ακτίνα του κύκλου.
- Να βρείτε
- α) Το συντελεστή τριβής μεταξύ σώματος- επιπέδου

β) Τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα $\omega_{\max}$

4. Το μικρό σώμα μάζας $m=1\text{Kg}$ συνδέεται με το κάτω άκρο του αβαρούς, μη ελαστικού νήματος μήκους $l=1\text{m}$ και το πάνω άκρο του ελατηρίου το οποίο έχει φυσικό μήκος $l_0=0,9\text{m}$ και σταθερά $k=80\text{N/m}$. Τα άλλα άκρα του νήματος και του ελατηρίου συνδέονται με μικρούς κυλίνδρους οι οποίοι είναι περασμένοι στη λεπτή κατακόρυφη ράβδο και μένουν στο ίδιο ύψος στηριζόμενοι σε κατάλληλες εγκοπές. Το νήμα και το ελατήριο σχηματίζουν με τη ράβδο γωνία 60° . Το σώμα εκτελεί ΟΚΚ σε οριζόντιο επίπεδο. Στις επαφές κυλίνδρων-ράβδου δεν υπάρχουν τριβές. Να βρείτε

α) Την τάση του νήματος

β) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του σώματος.

