

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΙΣ ΚΡΟΥΣΕΙΣ 2024 - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

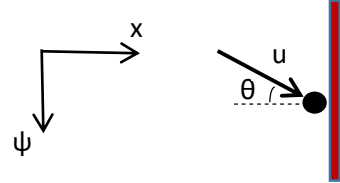
ΘΕΜΑ Α

. A₁ (5μ)

Μπαλάκι αμελητέας μάζας συγκρούεται ελαστικά με ακλόνητη κατακόρυφη επιφάνεια, με ταχύτητα η οποία σχηματίζει γωνία.

θ με την κάθετη στην επιφάνεια.

Ποια από τις προτάσεις είναι λάθος .



- α) Στο χρονικό διάστημα της κρούσης το έργο της δύναμης που ασκεί η επιφάνεια στο μπαλάκι είναι μηδέν.
- β) Τα μέτρα των συνιστωσών των ταχυτήτων του μπαλακίου ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση, στον άξονα x, είναι ίσα.
- γ) Οι κατακόρυφες συνιστώσες των ορμών του μπαλακίου ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση, δεν είναι ίσες
- δ) Το διάνυσμα της μεταβολής της ορμής του μπαλακίου μεταξύ οποιωνδήποτε χρονικών στιγμών στο χρονικό διάστημα της κρούσης, είναι κάθετο στην επιφάνεια .

A₂ (5μ)

Δύο σφαίρες (1), (2) μαζών m_1 , m_2 και ταχυτήτων u_1 , u_2 αντίστοιχα, συγκρούονται μεταξύ τους κεντρικά και ελαστικά. Οι ταχύτητες u_1 , u_2 είναι αντίρροπες Ισχύει $m_1 = 5 m_2$ και $u_1' = - u_1$

Η σχέση μεταξύ των μέτρων των ταχυτήτων των σφαιρών u_1 , u_2 είναι

- α) $u_2 = 2,5 u_1$
- β) $u_2 = 5 u_1$
- γ) $u_1 = 2,5 u_2$
- δ) $u_1 = 5 u_2$

A₃(5μ)

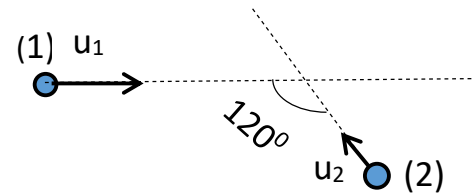
Δύο σφαίρες (1), (2) μαζών m_1 , m_2 και ταχυτήτων u_1 , u_2 αντίστοιχα, συγκρούονται μεταξύ τους κεντρικά και ελαστικά. Τα μέτρα των ταχυτήτων u_1 , u_2 είναι $u_1 = 2u$ και $u_2 = u$.

Ποια από τις προτάσεις είναι λάθος.

- α) Αν οι ταχύτητες u_1, u_2 είναι ομόρροπες και $m_1 \gg m_2$ με θετική φορά τη φορά των ταχυτήτων, οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σφαιρών μετά την κρούση u_1', u_2' είναι $u_1' \cong 2u, u_2' \cong 3u$
- β) Αν οι ταχύτητες u_1, u_2 είναι ομόρροπες και $m_2 \gg m_1$ με θετική φορά τη φορά των ταχυτήτων, οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σφαιρών μετά την κρούση u_1', u_2' είναι $u_1' \cong 0, u_2' \cong u$
- γ) Αν οι ταχύτητες u_1, u_2 είναι αντίρροπες και $m_1 \gg m_2$ με θετική φορά τη φορά της ταχύτητας u_1 , οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σφαιρών μετά την κρούση u_1', u_2' είναι $u_1' \cong 2u, u_2' \cong 3u$
- δ) Αν οι ταχύτητες u_1, u_2 είναι αντίρροπες και $m_2 \gg m_1$ με θετική φορά τη φορά της ταχύτητας u_1 , οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σφαιρών μετά την κρούση u_1', u_2' είναι $u_1' \cong -2u, u_2' \cong -u$

A₄ (5μ)

Οι μικρές σφαίρες (1), (2) κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, έχουν μάζες $m_1 = m, m_2 = 2m$ και μέτρα ταχυτήτων $u_1 = 2u, u_2 = u$. Οι ταχύτητες σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 120° . Οι σφαίρες συγκρούονται πλαστικά. Δίνεται $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Ποια από τις προτάσεις είναι σωστή.

- α) Η ταχύτητα του συσσωματώματος σχηματίζει γωνία 120° με την ταχύτητα που είχε η σφαίρα (1), πριν την κρούση.
- β) Η μηχανική ενέργεια του συστήματος των σφαιρών πριν την κρούση, ισούται με τη μηχανική του ενέργεια μετά την κρούση.
- γ) Το μέτρο της ορμής του συσσωματώματος ισούται με το μέτρο της ορμής που είχε η σφαίρα (2) πριν την κρούση.
- δ) Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος είναι $V_k = u/3$

A₅ (5μ) Ποιες από τις προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος

- α) Κατά την κρούση δύο σωμάτων τα οποία αποτελούν μονωμένο σύστημα, διατηρείται η ορμή κάθε σώματος, κάθε χρονική στιγμή, στο χρονικό διάστημα της κρούσης.
- β) Αμέσως μετά την κεντρική κρούση σφαίρας με ακίνητο ομογενή κύβο όπου η ταχύτητα της σφαίρας δεν

είναι κάθετη στην πλευρά του κύβου με την οποία συγκρούεται, τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση βρίσκονται στην ευθεία γραμμή που διέρχεται από τα κέντρα μάζας τους.

γ). Κατά την ΚΕΚ σφαίρας με ακίνητη σφαίρα τα μέτρα των ταχυτήτων τους αμέσως μετά την κρούση είναι ανάλογα με το μέτρο της ταχύτητας που είχε η κινούμενη σφαίρα, ελάχιστα πριν την κρούση.

δ). Κατά την κρούση μεταξύ δύο σφαιρών που αποτελούν μονωμένο σύστημα και έχουν αντίθετες ορμές ελάχιστα πριν συγκρουστούν, το ελάχιστο άθροισμα των κινητικών τους ενεργειών, είναι μηδέν.

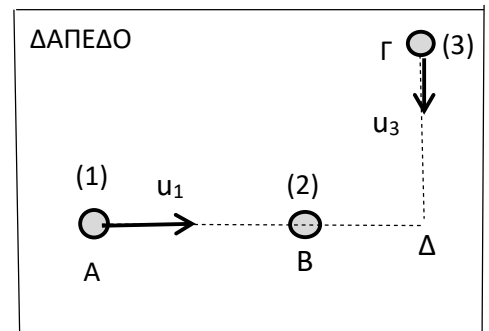
ε). Κατά την ανελαστική κρούση δύο σωμάτων τα οποία αποτελούν μονωμένο σύστημα, η διαφορά της ολικής κινητικής τους ενέργειας μεταξύ της χρονικής στιγμής ελάχιστα πριν την κρούση και της χρονικής στιγμής αμέσως μετά την κρούση, δεν ισούται με τη θερμότητα που εκλύεται κατά τη διάρκεια της κρούσης.

ΘΕΜΑ Β (40μ)

B₁(20μ)

Οι σφαίρες (1), (2), (3) βρίσκονται στα σημεία Α, Β, Γ την ίδια στιγμή.

Η σφαίρα (1) μάζας $m_1 = m$ και ταχύτητας μέτρου u_1 κινείται πάνω στο λείο δάπεδο προς την ακίνητη σφαίρα (2) μάζας $m_2 = 3m$. Η σφαίρα (3) μάζας $m_3 = 3m$ και ταχύτητας μέτρου u_2 κινείται προς το σημείο Δ. Ισχύουν $AB = \Gamma\Delta = 2B\Delta$ και το τμήμα $A\Delta$ είναι κάθετο στο τμήμα $\Gamma\Delta$. Πρώτα συγκρούονται οι σφαίρες (1),(2) με ΚΕΚ και στη συνέχεια οι σφαίρες (2), (3) με πλαστική κρούση.



Α. Η σχέση μεταξύ των μέτρων u_1 , u_3 είναι

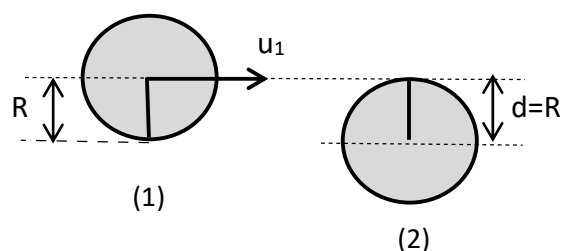
α) $u_1 = 2 u_3$ β) $u_1 = 3 u_3/2$ (+ αιτιολόγηση) ($3\mu + 7\mu$)

Β. Το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος το οποίο μετατρέπεται σε θερμότητα είναι

α) $5/7$ β) $3/7$ (+ αιτιολόγηση) ($3\mu + 7\mu$)

B₂ (20μ)

Πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται λεία σφαίρα (1) μάζας m και ακτίνας R με ταχύτητα μέτρου u_1 , προς την ακίνητη λεία σφαίρα (2) μάζας $2m$ και ακτίνας R . Η κρούση των σφαιρών είναι ελαστική και τα μέτρα των ταχυτήτων τους μετά τη κρούση

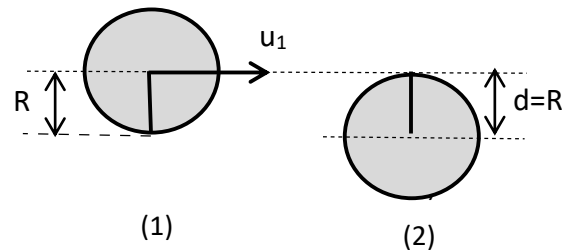


είναι ίσα. Η κάθετη απόσταση από το κέντρο της σφαίρας (2) στην ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας (1) και έχει τη διεύθυνση της ταχύτητας είναι $d = R$. Δίνονται $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta \mu 30^\circ = \frac{1}{2}$. Η γωνία μεταξύ των ταχυτήτων u_1, u_1' είναι

- α) $\pi/2$ β) $\pi/3$ (+ αιτιολόγηση) (5μ + 15μ)

B2 (Προαιρετική μετά το τέλος του διαγωνίσματος)

Πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται λεία σφαίρα (1) μάζας m και ακτίνας R με ταχύτητα μέτρου u_1 , προς την ακίνητη λεία σφαίρα (2) μάζας $2m$ και ακτίνας R . Η κρούση των σφαιρών είναι ελαστική. Η κάθετη απόσταση από το κέντρο της σφαίρας (2) στην ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας (1) και έχει τη διεύθυνση της ταχύτητας είναι $d = R$.



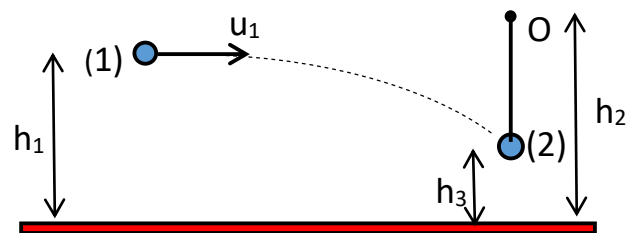
Δίνονται $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta \mu 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\epsilon \phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Η γωνία μεταξύ των ταχυτήτων u_1, u_1' είναι

- α) $\pi/2$ β) $\pi/3$

ΘΕΜΑ Γ (35μ)

Η μικρή σφαίρα (2) συνδέεται με το κάτω άκρο του κατακόρυφου, αβαρούς μη ελαστικού νήματος και είναι ακίνητη. Το άλλο άκρο του νήματος συνδέεται με το ακλόνητο σημείο στο Ο. Μια ίδια σφαίρα εκτοξεύεται οριζόντια από ύψος h_1 προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου u_1 .



Η σφαίρα (1) συγκρούεται μη κεντρικά

και ελαστικά με τη σφαίρα (2). Αμέσως μετά την κρούση η ταχύτητα της σφαίρας (2) είναι οριζόντια και η κινητική της ενέργεια είναι τριπλάσια της κινητικής ενέργειας της σφαίρας (1) μετά την κρούση. Η σφαίρα (2) κάνει ανακύκλωση περνώντας από το ανώτερο σημείο της τροχιάς της με την ελάχιστη ταχύτητα.

Δίνονται $h_2 = 1\text{m}$, $h_3 = 46\text{ cm}$, μάζα κάθε σφαίρας $m = 0,1\text{Kg}$ Θεωρούμε τις σφαίρες χωρίς διαστάσεις.
Να βρείτε

- α) Την ταχύτητα της σφαίρας (2) αμέσως μετά την κρούση. (10μ)
- β) Την ταχύτητα της σφαίρας (1) ελάχιστα πριν την κρούση. (10μ)
- γ) Το ύψος h_1 (7μ)
- δ) Τη μεταβολή της ορμής της σφαίρας (1) κατά την κρούση. (8μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1 . γ , A_2 β , A_3 δ , A_4 γ , A_5 Λ, Λ, Σ, Σ, Λ

ΘΕΜΑ Β

B_1

Α. Το χρονικό διάστημα της κίνησης της σφαίρας (1) από το Α στο Β είναι $\Delta t_{(A \rightarrow B)} = \frac{AB}{u_1}$ και το χρονικό διάστημα της κίνησης της σφαίρας (2) αμέσως μετά την ΚΕΚ από το Β στο Δ είναι $\Delta t_{(B \rightarrow \Delta)} = \frac{B\Delta}{u_2'}$ όπου

$$u_2' \text{ από την ΚΕΚ } u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 = \frac{2m}{4m} u_1 = \frac{u_1}{2} . \quad \text{Άρα} \quad \Delta t_{(B \rightarrow \Delta)} = \frac{2B\Delta}{u_1} = \frac{AB}{u_1}$$

$$\text{Επομένως το άθροισμα } \Delta t_{(A \rightarrow B)} + \Delta t_{(B \rightarrow \Delta)} = \frac{AB}{u_1} + \frac{AB}{u_1} = 2 \frac{AB}{u_1} \quad (1)$$

$$\text{Το χρονικό διάστημα της κίνησης της σφαίρας (3) από το Γ στο Β είναι } \Delta t_{(\Gamma \rightarrow B)} = \frac{\Gamma B}{u_3} \quad (2)$$

$$\text{Ισχύει } \Delta t_{(A \rightarrow B)} + \Delta t_{(B \rightarrow \Delta)} = \Delta t_{(\Gamma \rightarrow B)} \Rightarrow 2 \frac{AB}{u_1} = \frac{\Gamma B}{u_3} \Rightarrow u_1 = 2u_3 \quad \text{Σωστό το α}$$

Β. Ελάχιστα πριν την πλαστική κρούση των σωμάτων (2), (3) οι ταχύτητές τους είναι κάθετες και τα μέτρα τους είναι ίσα $u_2' = u_3 = \frac{u_1}{2} \quad (3)$

Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος $V_{κ.(2,3)}$ προκύπτει από την ΑΔΟ στο επίπεδο :

$$6mV_{κ.(2,3)} = 3m\sqrt{u_2'^2 + u_3^2} = 2V_{κ.(2,3)} = \sqrt{\frac{u_1^2}{4} + \frac{u_1^2}{4}} \Rightarrow V_{κ.(2,3)} = u_1\sqrt{2}/4 \quad (4)$$

Η θερμότητα που εκλύεται κατά την πλαστική κρούση είναι :

$$Q = K_{ολ.(2,3)} ΠΡΙΝ - K_{ολ.(2,3)} ΜΕΤΑ = \frac{1}{2} 3m u_2'^2 + \frac{1}{2} 3m u_3^2 - \frac{1}{2} 6m V_{κ.(2,3)}^2 \text{ και λόγω των (3) , (4)}$$

$$Q = \frac{1}{2} 3m \left(\frac{u_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} 3m \left(\frac{u_1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} 6m \left(u_1\sqrt{2}/4\right)^2 = \frac{3}{4} m u_1^2 - \frac{3}{8} m u_1^2 = \frac{3}{8} m u_1^2 \quad (5)$$

$$Η αρχική ολική κινητική ενέργεια των σφαιρών είναι $K_{ολ.} = \frac{1}{2} m u_1^2 + \frac{1}{2} 3m \left(\frac{u_1}{2}\right)^2 = \frac{7}{8} m u_1^2 \quad (6)$$$

Το κλάσμα $Q/K_{ολ.}$ λόγω των (5) ,(6) είναι $Q/K_{ολ.} = 3/7$ Σωστό το β .

B₂ (20)

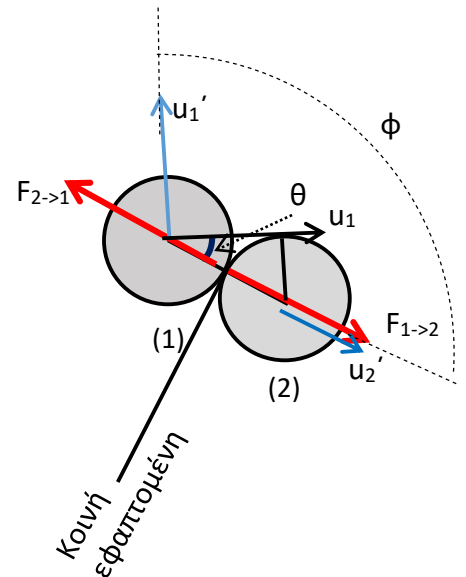
A.

Κατά την κρούση οι ωστικές δυνάμεις μεταξύ των σφαιρών $F_{1 \rightarrow 2}$, $F_{2 \rightarrow 1}$ είναι κάθετες στην κοινή εφαπτομένη τους και διέρχονται από τα κέντρα τους.

$$\vec{F}_{(1 \rightarrow 2)} = \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_2' - \vec{p}_2}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_2'}{\Delta t}$$

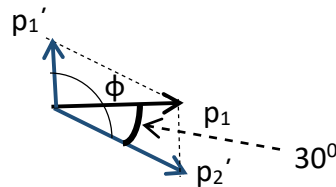
Από τη σχέση $\vec{F}_{(1 \rightarrow 2)} = \frac{\vec{p}_2'}{\Delta t}$ τα διανύσματα $\vec{p}_2'$ και $\vec{u}_2'$

έχουν τη διεύθυνση της $\vec{F}_{(1 \rightarrow 2)}$, δηλαδή της ευθείας που διέρχεται από τα κέντρα των σφαιρών και σχηματίζουν γωνία θ με τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{u}_1$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\eta\mu\theta = R / 2R \Rightarrow \eta\mu\theta = 1 / 2 \Rightarrow \Rightarrow \theta = 30^\circ$



Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ με τον κανόνα του παραλληλογράμμου με τις ολικές ορμές του συστήματος λίγο πριν και αμέσως μετά την κρούση :

$$\vec{p}_{1,2} = \vec{p}'_{1,2} \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$



Η σχέση μεταξύ των μέτρων των $\vec{p}_1$, $\vec{p}'_1$, $\vec{p}'_2$ είναι :

$$m^2 u_1^2 = m^2 u_1'^2 + 4m^2 u_2'^2 + 4m^2 u_1' u_2' \cos\phi \Rightarrow p_1 = \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1' p_2' \cos\phi} \Rightarrow u_1^2 = u_1'^2 + 4u_2'^2 + 4u_1' u_2' \cos\phi \text{ και επειδή}$$

$$u_1' = u_2' \text{ έχουμε } u_1^2 = 5u_1'^2 + 4u_1'^2 \cos\phi \quad (1)$$

ΠΑΝΑΝΑΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

ΑΔΚΕ με τις ολικές κινητικές ενέργειες του συστήματος ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση:

$$\frac{1}{2}mu_1^2 = \frac{1}{2}mu_1'^2 + \frac{1}{2}2mu_2'^2 \Rightarrow u_1^2 = u_1'^2 + 2u_2'^2 \Rightarrow u_1^2 = 3u_1'^2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) $3u_1'^2 = 5u_1'^2 + 4u_1'^2 \sin\varphi \Rightarrow -2u_1'^2 = 4u_1'^2 \sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = -1/2 \Rightarrow \varphi = 120^\circ$

Επομένως η γωνία μεταξύ των ταχυτήτων $\vec{u}_1, \vec{u}_1'$ είναι $120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ Σωστή η α

B2 (Προαιρετική μετά το τέλος του διαγωνίσματος)

A.

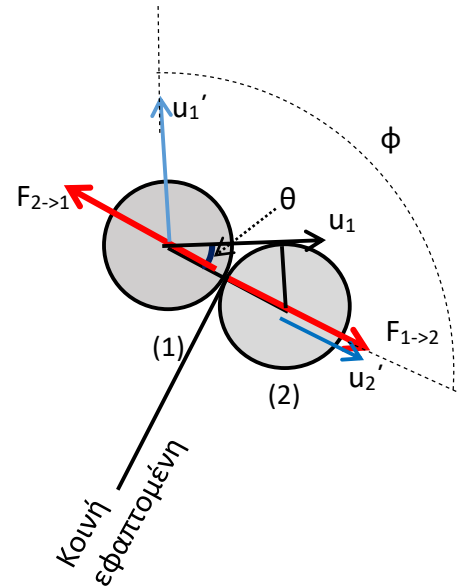
Κατά την κρούση οι ωστικές δυνάμεις μεταξύ των σφαιρών

$F_{1 \rightarrow 2}, F_{2 \rightarrow 1}$ είναι κάθετες στην κοινή εφαπτομένη τους και διέρχονται από τα κέντρα τους.

$$\vec{F}_{(1 \rightarrow 2)} = \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_2' - \vec{p}_2}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_2'}{\Delta t}$$

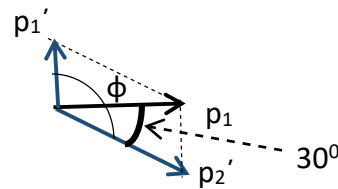
Από τη σχέση $\vec{F}_{(1 \rightarrow 2)} = \frac{\vec{p}_2'}{\Delta t}$ τα διανύσματα $\vec{p}_2'$ και $\vec{u}_2'$

έχουν τη διεύθυνση της $\vec{F}_{(1 \rightarrow 2)}$, δηλαδή της ευθείας που διέρχεται από τα κέντρα των σφαιρών και σχηματίζουν γωνία θ με τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{u}_1$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\eta\mu\theta = R / 2R \Rightarrow \eta\mu\theta = 1 / 2 \Rightarrow \theta = 30^\circ$



Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ με τον κανόνα του παραλληλογράμμου με τις ολικές ορμές του συστήματος λίγο πριν και αμέσως μετά την κρούση :

$$\vec{p}_{1,2} = \vec{p}_{1,2}' \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$



Η σχέση μεταξύ των μέτρων των $\vec{p}_1, \vec{p}_1', \vec{p}_2'$ είναι :

$$p_1 = \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2'\sin\varphi} \Rightarrow$$

$$m^2u_1^2 = m^2u_1'^2 + 4m^2u_2'^2 + 4m^2u_1'u_2'\sin\varphi \Rightarrow u_1^2 = u_1'^2 + 4u_2'^2 + 4u_1'u_2'\sin\varphi \quad (1)$$

ΑΔΚΕ με τις ολικές κινητικές ενέργειες του συστήματος ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση:

$$\frac{1}{2} m u_1'^2 = \frac{1}{2} m u_1'^2 + \frac{1}{2} 2 m u_2'^2 \Rightarrow u_1'^2 = u_1'^2 + 2 u_2'^2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) $\Rightarrow u_1'^2 + 2 u_2'^2 = u_1'^2 + 4 u_2'^2 + 4 u_1' u_2' \sin \phi \Rightarrow -2 u_2'^2 = 4 u_1' u_2' \sin \phi \Rightarrow$
 $\sin \phi = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u_2'}{u_1'} \quad (3)$

Από το παραλληλόγραμμα η $\epsilon\phi 30^\circ$ είναι $\epsilon\phi 30^\circ = \frac{m u_1' \eta \mu \phi}{2 m u_2' + m u_1' \sin \phi} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{u_1' \eta \mu \phi}{2 u_2' + u_1' \sin \phi}$

$$\Rightarrow \frac{3}{9} = \frac{(u_1' \eta \mu \phi)^2}{(2 u_2' + u_1' \sin \phi)^2} \Rightarrow 3 u_1'^2 \eta \mu^2 \phi = (2 u_2' + u_1' \sin \phi)^2 \quad \text{και λόγω της (3)}$$

$$3 u_1'^2 \eta \mu^2 \phi = [2 u_2' + u_1' (-\frac{1}{2} \cdot \frac{u_2'}{u_1'})]^2 \Rightarrow 3 u_1'^2 \eta \mu^2 \phi = (2 u_2' - \frac{u_2'}{2})^2 \Rightarrow 3 u_1'^2 \eta \mu^2 \phi = (\frac{3 u_2'}{2})^2 \Rightarrow$$

$$3 u_1'^2 \eta \mu^2 \phi = 9 u_2'^2 / 4 \Rightarrow u_1'^2 \eta \mu^2 \phi = 3 u_2'^2 / 4 \Rightarrow \eta \mu \phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{u_2'}{u_1'} \quad (4)$$

Από τη σχέση $\eta \mu^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ και τις σχέσεις (3), (4) $\Rightarrow (-\frac{1}{2} \cdot \frac{u_2'}{u_1'})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{u_2'}{u_1'})^2 = 1 \Rightarrow$

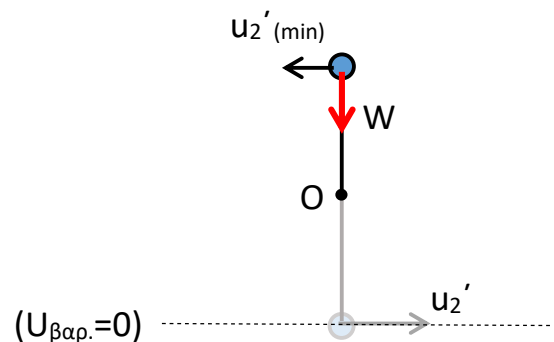
$$4 u_2'^2 = 4 u_1'^2 \Rightarrow u_2' = u_1' \quad \text{Δηλαδή τα μέτρα των ταχυτήτων των σφαιρών μετά την κρούση είναι ίσα.}$$

Στη συνέχεια η λύση του B₂ (20μ)

ΘΕΜΑ Γ

α)

Αμέσως μετά την κρούση το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας (2) είναι u_2' . Στο ανώτερο σημείο της κυκλικής της τροχιάς έχει την ελάχιστη ταχύτητα $u_{2'(\min)}$. Επειδή στο ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς της η σφαίρα έχει την ελάχιστη ταχύτητα, της ασκείται στο σημείο αυτό μόνο η δύναμη του βάρους της (Τάση του νήματος $T_{\text{νήματος}} = 0$)



Εφαρμόζουμε το Β Νόμο : $\Sigma F = m a_{\kappa} \Rightarrow W = m \frac{u_{2'(\min)}^2}{R} \Rightarrow mg = m \frac{u_{2'(\min)}^2}{R} \Rightarrow u_{2'(\min)}^2 = g R \quad (1)$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ στο πεδίο βαρύτητας μεταξύ του κατώτερου και του ανώτερου σημείου της τροχιάς της σφαίρας (2)

$$E_{\text{μηχ (κατώτερο)}} = E_{\text{μηχ. (ανώτερο)}} \Rightarrow \frac{1}{2} m u_2'^2 = mg 2R + \frac{1}{2} m u_{2'(\min)}^2 \Rightarrow u_2'^2 = 4gR + u_{2'(\min)}^2 \quad \text{και}$$

$$\text{λόγω της σχέσης (1)} \Rightarrow u_2'^2 = 4gR + gR \Rightarrow u_2'^2 = 5gR \quad (2)$$

$$\text{Από τα δεδομένα του θέματος } R = h_1 - h_3 = 1 - 0,46 = 0,54 \text{ m} \quad (3)$$

Με αντικατάσταση της (3) στη σχέση (2) $u_2'^2 = 50 \cdot 0,54 \Rightarrow u_2'^2 = 27 \Rightarrow u_2' = 9 \cdot 3 \Rightarrow u_2' = 3\sqrt{3} \text{ m/s}$
(Εδώ θα πέσει το κλάμα του μαθητή)

$$\beta) \text{ Από τη σχέση } K_2' = 3K_1' \Rightarrow \frac{1}{2}mu_2'^2 = 3 \cdot \frac{1}{2}mu_1'^2 \Rightarrow u_2'^2 = 3 \cdot u_1'^2 \Rightarrow 27 = 3u_1'^2 \Rightarrow u_1'^2 = 9 \Rightarrow u_1' = 3 \text{ m/s}$$

Επειδή η κρούση είναι μη κεντρική ελαστική οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\pi/2$ (5.41 ΣΧ. ΒΙΒΛΙΟΥ).

Θεωρούμε ότι η γωνία μεταξύ των ορμών (ταχυτήτων) μετά την κρούση είναι φ .

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

$$\vec{p}_{1,2} = \vec{p}'_{1,2} \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

Η σχέση μεταξύ των μέτρων των $\vec{p}_1$, $\vec{p}'_1$, $\vec{p}'_2$ είναι :

$$p_1 = \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2'\cos\varphi} \Rightarrow$$

$$m^2u_1^2 = m^2u_1'^2 + m^2u_2'^2 + 2m^2u_1'u_2'\cos\varphi \Rightarrow$$

$$u_1^2 = u_1'^2 + u_2'^2 + 2u_1'u_2'\cos\varphi \quad (4)$$

$$\text{Εφαρμόζουμε την ΑΔΚΕ} \quad \frac{1}{2}mu_1^2 = \frac{1}{2}mu_1'^2 + \frac{1}{2}mu_2'^2 \Rightarrow u_1^2 = u_1'^2 + u_2'^2 \quad (5)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (4),(5)} \Rightarrow u_1'^2 + u_2'^2 = u_1'^2 + u_2'^2 + 2u_1'u_2'\cos\varphi \Rightarrow 2u_1'u_2'\cos\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2$$

Επομένως η ταχύτητα της σφαίρας (1) είναι κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ με τον κανόνα του παραλληλογράμμου από τη στιγμή ελάχιστα πριν την κρούση μέχρι τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση . Το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

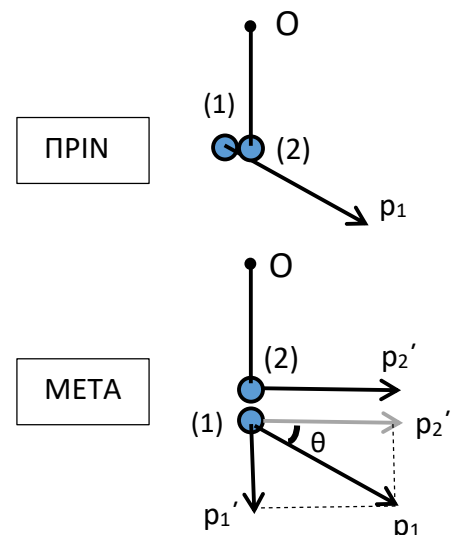
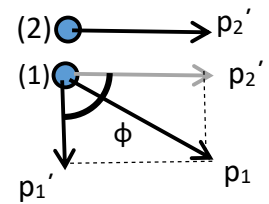
$$\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

Η σχέση μεταξύ των μέτρων των $\vec{p}_1$, $\vec{p}'_1$, $\vec{p}'_2$ είναι :

$$p_1 = \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2} \Rightarrow m^2u_1^2 = m^2u_1'^2 + m^2u_2'^2$$

$$\Rightarrow u_1^2 = u_1'^2 + u_2'^2 \Rightarrow u_1^2 = 9 + 27 \Rightarrow$$

$$u_1^2 = 36 \Rightarrow u_1 = 6 \text{ m/s}$$



$$\varepsilon \phi \theta = \frac{p_1'}{p_2'} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

γ)

Αναλύουμε την ταχύτητα της σφαίρας (1)

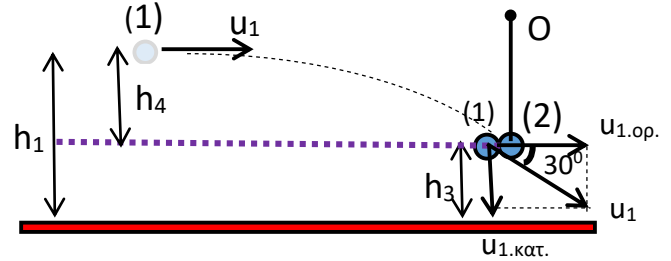
ελάχιστα πριν την κρούση, στην κατακόρυφη συνιστώσα $u_{1,κατ.}$.

$$u_{1,κατ.} = u_1 \eta \mu 30^\circ \Rightarrow u_{1,κατ.} = 3 \text{ m/s}$$

$$\text{Όμως } u_{1,κατ.} = g t \Rightarrow 3 = 10 t \Rightarrow t = 0,3 \text{ s}$$

$$\text{και } h_4 = \frac{1}{2} g t^2 = 5 \cdot 0,09 = 0,45 \text{ m}$$

$$\text{Επομένως } h_1 = h_3 + h_4 = 0,46 + 0,45 = 0,91 \text{ m}$$



δ) Στο το παραλληλόγραμμο των ορμών των σφαιρών ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση, σύμφωνα με την ΑΔΟ, σχεδιάζουμε τα διανύσματα

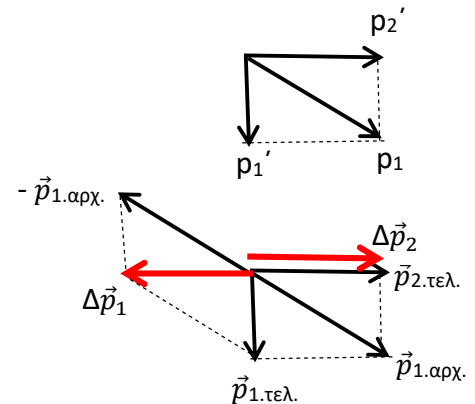
$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1,τελ.} - \vec{p}_{1,αρχ.} = \vec{p}_{1,τελ.} + (-\vec{p}_{1,αρχ.})$$

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2,τελ.} - \vec{p}_{2,αρχ.} = \vec{p}_{2,τελ.} + (-\vec{p}_{2,αρχ.}) = \vec{p}_{2,τελ.}$$

$$\text{Ισχύει } \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 = -\vec{p}_{2,τελ.}$$

$$\text{Το μέτρο } p_{2,τελ.} = m u_2' = 0,1 \cdot 3\sqrt{3} = 0,3 \cdot \sqrt{3} \text{ Kg m/s}$$

Άρα το μέτρο της μεταβολής $\Delta \vec{p}_1$ είναι $\Delta p_1 = 0,3 \cdot \sqrt{3} \text{ Kg m/s}$, η διεύθυνσή της οριζόντια και η φορά της προς τα αριστερά.



pananasgiannis@hahoo.gr