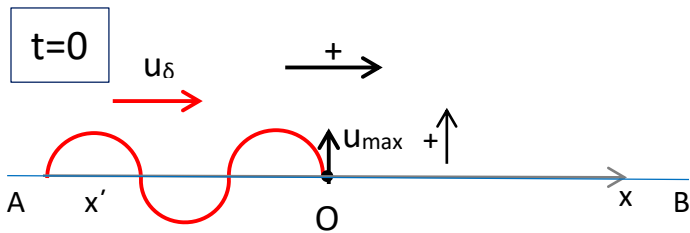


ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣ ΤΑ ΘΕΤΙΚΑ ΚΑΙ ΠΡΟΣ ΤΑ ΑΡΝΗΤΙΚΑ - ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Παράδειγμα 1

Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται σε ελαστική χορδή AB από το άκρο της A στο άκρο της B. Θεωρούμε άξονα $x'Ox$, πάνω στη χορδή, με θετική φορά από το A στο B. Το υλικό σημείο στο O, τη χρονική στιγμή $t=0$, έχει απομάκρυνση $\psi_0=0$ και ταχύτητα $u_0 = u_{\max}$ με φορά προς τα πάνω. Θεωρούμε θετική φορά για τις ταλαντώσεις προς τα πάνω.



Η εξίσωση του κύματος ως προς το σημείο O είναι : $\psi = 0,2 \eta\mu 2\pi(t - 0,5x)$ (S.I.)

A₁ Να βρεθεί η εξίσωση της φάσης και η εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου στο σημείο O, σε συνάρτηση με το χρόνο. Να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

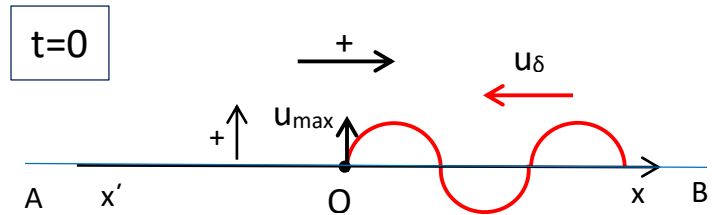
Απάντηση

Από την εξίσωση $T=1s$, $\lambda=2m$, $u_\delta = \frac{\lambda}{T} = 2m/s$

Στις εξισώσεις $\psi = 2\pi(t - 0,5x)$,

Παράδειγμα 2

Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται σε ελαστική χορδή AB από το άκρο της B στο άκρο της A. Θεωρούμε άξονα $x'Ox$, πάνω στη χορδή, με θετική φορά από το A στο B. Το υλικό σημείο στο O, τη χρονική στιγμή $t=0$, έχει απομάκρυνση $\psi_0=0$ και ταχύτητα $u_0 = u_{\max}$ με φορά προς τα πάνω. Θεωρούμε θετική φορά για τις ταλαντώσεις προς τα πάνω.



Η εξίσωση του κύματος ως προς το σημείο O είναι : $\psi = 0,2 \eta\mu 2\pi(t + 0,5x)$ (S.I.)

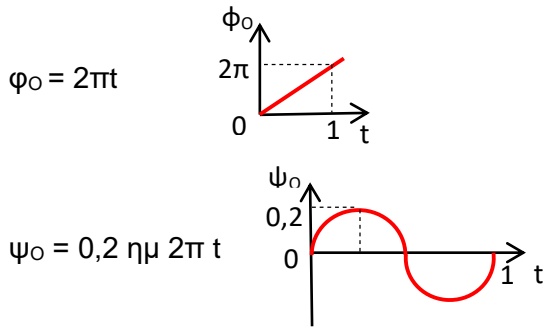
A₁ Να βρεθεί η εξίσωση της φάσης και η εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου στο σημείο O, σε συνάρτηση με το χρόνο. Να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Απάντηση

Από την εξίσωση $T=1s$, $\lambda=2m$, $u_\delta = \frac{\lambda}{T} = 2m/s$

Στις εξισώσεις $\psi = 2\pi(t + 0,5x)$,

$\psi = 0,2 \text{ ημ } 2\pi(t - 0,5x)$ για $x=0$ έχουμε :

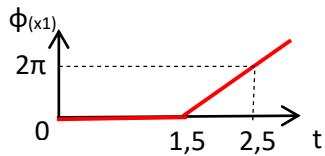


A₂ Να βρεθεί η εξίσωση της φάσης και η εξίσωση της απομάκρυνσης των υλικών σημείων στις θέσεις $x_1=3\text{m}$ και $x_2=-4\text{m}$ σε συνάρτηση με το χρόνο. Να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Απάντηση

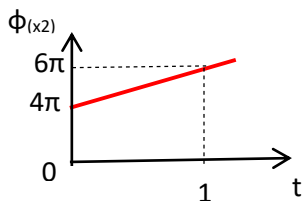
$\phi_{(x_1)} = 2\pi(t - 1,5)$: Για $\phi_{(x_1)} = 0$, $t=1,5\text{s}$

Το μόριο στο x_1 αρχίζει να εκτελεί ΑΑΤ τη χρονική στιγμή $t=1,5\text{s}$. Για $t=2,5\text{s}$, $\phi_{(x_1)} = 2\pi \text{ rad}$

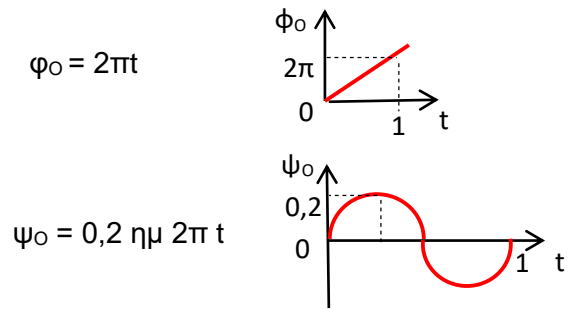


$\phi_{(x_2)} = 2\pi(t + 2)$: Για $t=0$, $\phi_{(x_2)} = 4\pi \text{ rad}$

Το μόριο στο x_2 εκτελεί ΑΑΤ όταν το κύμα φτάνει στο Ο τη στιγμή $t=0$. Για $t=T=1\text{s}$, $\phi_{(x_2)} = 6\pi \text{ rad}$



$\psi = 0,2 \text{ ημ } 2\pi(t + 0,5x)$ για $x=0$ έχουμε :

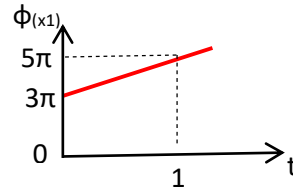


A₂ Να βρεθεί η εξίσωση της φάσης και η εξίσωση της απομάκρυνσης των υλικών σημείων στις θέσεις $x_1=3\text{m}$ και $x_2=-4\text{m}$ σε συνάρτηση με το χρόνο. Να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Απάντηση

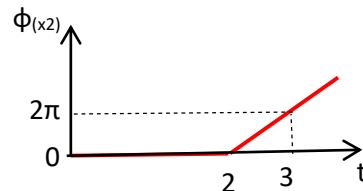
$\phi_{(x_1)} = 2\pi(t + 1,5)$: Για $t=0$, $\phi_{(x_1)} = 3\pi \text{ rad}$

Το μόριο στο x_1 εκτελεί ΑΑΤ όταν το κύμα φτάνει στο Ο τη στιγμή $t=0$. Για $t=T=1\text{s}$, $\phi_{(x_1)} = 5\pi \text{ rad}$

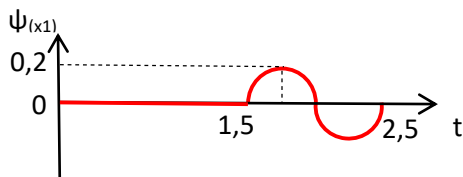


$\phi_{(x_2)} = 2\pi(t - 2)$: Για $\phi_{(x_2)} = 0$, $t=2\text{s}$

Το μόριο στο x_2 αρχίζει να εκτελεί ΑΑΤ τη χρονική στιγμή $t=2\text{s}$. Για $t=3\text{s}$, $\phi_{(x_2)} = 2\pi \text{ rad}$

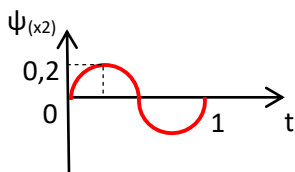


$$\psi_{(x_1)} = 0,2 \eta\mu 2\pi(t - 1,5)$$



$$\psi_{(x_2)} = 0,2 \eta\mu 2\pi(t + 2) = 0,2 \eta\mu (2\pi t + 4\pi)$$

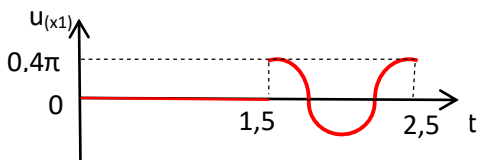
$$\psi_{(x_2)} = 0,2 \eta\mu 2\pi t$$



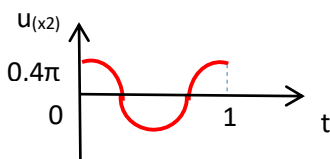
A₃ Να βρεθεί η εξίσωση ταχύτητας και η εξίσωση της επιτάχυνσης των υλικών σημείων στις θέσεις $x_1 = 3\text{m}$ και $x_2 = -4\text{m}$ σε συνάρτηση με το χρόνο. Να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Απάντηση

$$u_{(x_1)} = 0,4\pi \sigma\upsilon\nu 2\pi(t - 1,5)$$



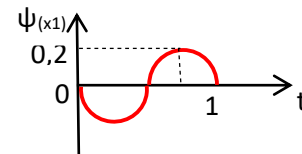
$$u_{(x_2)} = 0,4\pi \sigma\upsilon\nu 2\pi(t + 2) = 0,4\pi \sigma\upsilon\nu 2\pi t$$



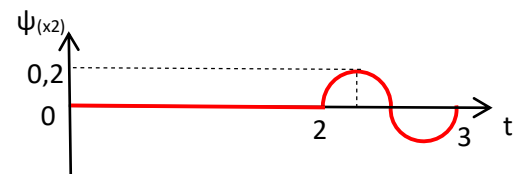
Παναγός Γιάννης φυσικός

$$\psi_{(x_1)} = 0,2 \eta\mu 2\pi(t + 1,5) = 0,2 \eta\mu (2\pi t + 3\pi)$$

$$\Rightarrow \psi_{(x_1)} = 0,2 \eta\mu (2\pi t + \pi)$$



$$\psi_{(x_2)} = 0,2 \eta\mu 2\pi(t - 2) \Rightarrow$$

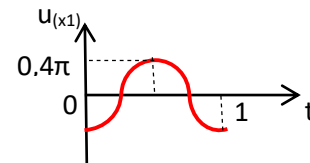


A₃ Να βρεθεί η εξίσωση της ταχύτητας και η εξίσωση της επιτάχυνσης των υλικών σημείων στις θέσεις $x_1 = 3\text{m}$ και $x_2 = -4\text{m}$ σε συνάρτηση με το χρόνο. Να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

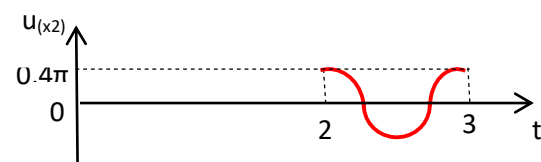
Απάντηση

$$u_{(x_1)} = 0,4\pi \sigma\upsilon\nu 2\pi(t + 1,5) = 0,4\pi \sigma\upsilon\nu (2\pi t + 3\pi)$$

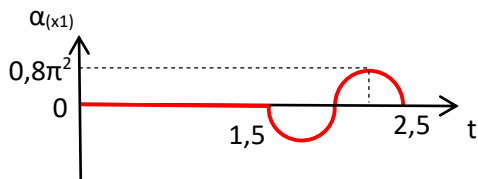
$$\Rightarrow u_{(x_1)} = 0,4\pi \sigma\upsilon\nu (2\pi t + \pi)$$



$$u_{(x_2)} = 0,4\pi \sigma\upsilon\nu 2\pi(t - 2)$$

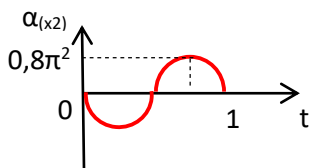


$$\alpha_{(x_1)} = -0,8\pi^2 \eta\mu 2\pi(t - 1,5)$$



$$\alpha_{(x_2)} = -0,8\pi^2 \eta\mu 2\pi(t + 2) = -0,8\pi^2 \eta\mu (2\pi t + 4\pi)$$

$$\alpha_{(x_2)} = -0,8\pi^2 \eta\mu 2\pi t$$



A₄ Να βρεθεί η απομάκρυνση και η ταχύτητα των υλικών σημείων στις θέσεις $x_1 = 3\text{m}$ και $x_2 = -4\text{m}$, τις χρονικές στιγμές $t_1 = \frac{13}{12}\text{s}$, $t_2 = \frac{13}{6}\text{s}$

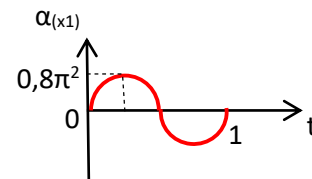
Απάντηση

Τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{13}{12}\text{s} = (1 + \frac{1}{12})\text{s}$ το κύμα δεν έχει φτάσει στο μόριο, στο x_1 . (Φτάνει τη χρονική στιγμή $t = 1,5\text{s}$). Άρα $\psi_{(x_1)}(t_1) = 0$, $u_{(x_1)}(t_1) = 0$

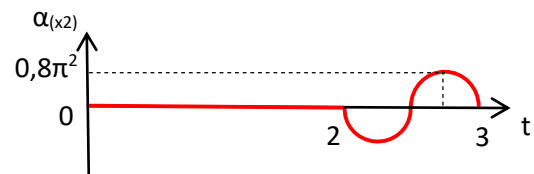
$$\begin{aligned} \psi_{(x_1)}(t_2) &= 0,2 \eta\mu 2\pi(t_2 - 1,5) = 0,2\eta\mu 2\pi(\frac{13}{6} - 1,5) \\ &= 0,2 \eta\mu 2\pi(\frac{1}{6} + 0,5) = 0,2\eta\mu \frac{4\pi}{3} = 0,2(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -0,1\sqrt{3}\text{m} \\ u_{(x_1)}(t_2) &= 0,4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(t_2 - 1,5) = 0,4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{13}{6} - 1,5) \\ &= 0,4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{1}{6} + 0,5) = 0,4\pi\sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3} = -0,2\pi\text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\alpha_{(x_1)} = -0,8\pi^2 \eta\mu 2\pi(t + 1,5) = -0,8\pi^2 \eta\mu (2\pi t + 3\pi)$$

$$\Rightarrow \alpha_{(x_1)} = -0,8\pi^2 \eta\mu (2\pi t + \pi)$$



$$\alpha_{(x_2)} = -0,8\pi^2 \eta\mu 2\pi(t - 2)$$



A₄ Να βρεθεί η απομάκρυνση και η ταχύτητα των υλικών σημείων στις θέσεις $x_1 = 3\text{m}$ και $x_2 = -4\text{m}$, τις χρονικές στιγμές $t_1 = \frac{13}{12}\text{s}$, $t_2 = \frac{13}{6}\text{s}$

Απάντηση

$$\begin{aligned} \psi_{(x_1)}(t_1) &= 0,2 \eta\mu 2\pi(t_1 + 1,5) = 0,2\eta\mu 2\pi(\frac{13}{12} + 1,5) \\ &= 0,2\eta\mu 2\pi(\frac{1}{12} + 2,5) = 0,2\eta\mu(\frac{\pi}{6} + \pi) = -0,1\text{m} \\ u_{(x_1)}(t_1) &= 0,4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(t_1 + 1,5) = 0,4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{13}{12} + 1,5) \\ &= 0,4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{1}{12} + 2,5) = 0,4\pi\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6} + \pi) = -0,2\pi\sqrt{3}\text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{(x_1)}(t_2) &= 0,2 \eta\mu 2\pi(t_2 + 1,5) = 0,2\eta\mu 2\pi(\frac{13}{6} + 1,5) \\ &= 0,2\eta\mu 2\pi(\frac{1}{6} + 3,5) = 0,2\eta\mu(\frac{\pi}{3} + \pi) = -0,1\sqrt{3}\text{ m} \\ u_{(x_1)}(t_2) &= 0,4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(t_2 + 1,5) = 0,4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{13}{6} + 1,5) \\ &= 0,4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{1}{6} + 3,5) = 0,4\pi\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{3} + \pi) = -0,2\pi\text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{(x_2)}(t_1) &= 0,2 \text{ ημ } 2\pi(t_1 + 2) = 0,2 \text{ ημ } 2\pi\left(\frac{13}{12} + 2\right) \\ \Rightarrow \psi_{(x_2)}(t_1) &= 0,2 \text{ ημ } 2\pi\left(\frac{1}{12} + 3\right) = 0,2 \text{ ημ } \frac{\pi}{6} = 0,1 \text{ m} \\ u_{(x_2)}(t_1) &= 0,4\pi \text{ συν} 2\pi(t_1 + 2) = 0,4\pi \text{ συν} 2\pi\left(\frac{13}{12} + 2\right) \\ \Rightarrow u_{(x_2)}(t_1) &= 0,4\pi \text{ συν} \frac{\pi}{6} = 0,2\pi\sqrt{3} \text{ m/s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{(x_2)}(t_2) &= 0,2 \text{ ημ } 2\pi(t_2 + 2) = 0,2 \text{ ημ } 2\pi\left(\frac{13}{6} + 2\right) \\ &= 0,2 \text{ ημ } 2\pi\left(\frac{1}{6} + 4\right) = 0,2 \text{ ημ } \frac{\pi}{3} = 0,1\sqrt{3} \text{ m} \\ u_{(x_2)}(t_2) &= 0,4\pi \text{ συν} 2\pi(t_2 + 2) = 0,4\pi \text{ συν} 2\pi\left(\frac{13}{6} + 2\right) \\ &= 0,4\pi \text{ συν} \frac{\pi}{3} = 0,2\pi \text{ m/s}\end{aligned}$$

A₅ Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 που το υλικό σημείο στη θέση $x_1 = 3\text{m}$, έχει απομάκρυνση $\psi_{(x_1)} = 0,1\text{m}$ για τρίτη φορά.

Απάντηση

$$\begin{aligned}\psi_{(x_1)}(t) &= 0,2 \text{ ημ } 2\pi(t - 1,5) \Rightarrow \psi_{(x_1)}(t_1) = 0,2 \text{ ημ } 2\pi(t_1 - 1,5) \\ \Rightarrow 0,1 &= 0,2 \text{ ημ } 2\pi(t_1 - 1,5) \Rightarrow \text{ ημ } 2\pi(t_1 - 1,5) = \frac{1}{2} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$2\pi(t_1 - 1,5) = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi$$

Για $k_1 = 0$ (η μικρότερη

$$\text{γωνία) } 2\pi(t_1 - 1,5) = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{19}{12} \text{ s } \quad (1^{\text{η}} \text{ φ.})$$

Για $k_1 = 1$,

$$2\pi(t_1 - 1,5) = \frac{\pi}{6} + 2\pi \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{31}{12} \text{ s } \quad (3^{\text{η}} \text{ φορά})$$

$$2\pi(t_1 - 1,5) = \frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi$$

$$\text{Για } k_2 = 0, 2\pi(t_1 - 1,5) = \frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{23}{12} \text{ s } \quad (2^{\text{η}} \text{ φ.})$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{13}{12} \text{ s} = (1 + \frac{1}{12} \text{ s})$ το κύμα δεν έχει φτάσει στο μόριο, στο x_2 . (Φτάνει τη χρονική στιγμή $t = 2\text{s}$). Άρα $\psi_{(x_2)}(t_1) = 0$, $u_{(x_2)}(t_1) = 0$

$$\begin{aligned}\psi_{(x_2)}(t_2) &= 0,2 \text{ ημ } 2\pi(t_2 - 2) = 0,2 \text{ ημ } 2\pi\left(\frac{13}{6} - 2\right) \\ &= 0,2 \text{ ημ } \frac{\pi}{3} = 0,1\sqrt{3} \text{ m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{(x_2)}(t_2) &= 0,4\pi \text{ συν} 2\pi(t_2 - 2) = 0,4\pi \text{ συν} 2\pi\left(\frac{13}{6} - 2\right) \\ &= 0,4\pi \text{ συν} \frac{\pi}{3} = 0,2\pi \text{ m/s}\end{aligned}$$

A₅ Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 που το υλικό σημείο στη θέση $x_2 = -4\text{m}$, έχει απομάκρυνση $\psi_{(x_2)} = -0,1\text{m}$ και θετική ταχύτητα για δεύτερη φορά.

Απάντηση

$$\begin{aligned}\psi_{(x_2)}(t) &= 0,2 \text{ ημ } 2\pi(t - 2) \Rightarrow \psi_{(x_2)}(t_1) = 0,2 \text{ ημ } 2\pi(t_1 - 2) \\ \Rightarrow -0,1 &= 0,2 \text{ ημ } 2\pi(t_1 - 2) \Rightarrow \text{ ημ } 2\pi(t_1 - 2) = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$2\pi(t_1 - 2) = \frac{7\pi}{6} + 2k_1\pi$$

Για $k_1 = 0$ (η μικρότερη

$$\text{γωνία) } 2\pi(t_1 - 2) = \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{και } u_{(x_2)}(t_1) = 0,4\pi \text{ συν} \frac{7\pi}{6}$$

$$= -0,2\pi\sqrt{3} < 0$$

(απορρίπτεται)

$$2\pi(t_1 - 2) = \frac{11\pi}{6} + 2k_2\pi$$

$$\text{Για } k_2 = 0, 2\pi(t_1 - 2) = \frac{11\pi}{6}$$

$$\text{και } u_{(x_2)}(t_1) = 0,4\pi \text{ συν} \frac{11\pi}{6}$$

$$= 0,2\pi\sqrt{3} > 0. \quad \text{Άρα}$$

$$t_1 - 2 = \frac{11}{12} \Rightarrow t_1 = \frac{35}{12} \text{ s } \quad (1^{\text{η}} \text{ φ.})$$

$$\text{Για } k_2 = 1, 2\pi(t_1 - 2) = \frac{11\pi}{6} + 2\pi$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{47}{12} \text{ s } \quad (2^{\text{η}} \text{ φορά})$$

B₁ Να βρεθεί η εξίσωση της φάσης των υλικών σημείων σε συνάρτηση με τη θέση της θέσης ισορροπίας τους, στον άξονα x Όχι τη χρονική στιγμή $t_1=1,5s$. Να γίνει η αντίστοιχη γραφική παράσταση.

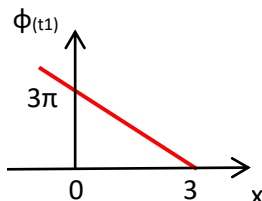
Απάντηση

$$\text{Γιά } t = t_1 = 1,5s. \quad \varphi_{(t_1)}(x) = 2\pi (1,5 - 0,5x)$$

$$\varphi_{(t_1)}(x) = 0 \Rightarrow 1,5 - 0,5x = 0 \Rightarrow x = 3m$$

Το υλικό σημείο στη θέση $x=3m$ αρχίζει να εκτελεί ΑΑΤ, όπως το υλικό σημείο στη θέση $x=0$ τη χρονική στιγμή $t=0$.

$$\text{Γιά } x = 0, \quad \varphi_{(t_1)}(0) = 3\pi$$



B₂ Να βρεθούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης, των υλικών σημείων της χορδής σε συνάρτηση με τη θέση, της θέσης ισορροπίας τους στον άξονα x Όχι (στιγμιότυπο) τις χρονικές στιγμές $t_1=1,5s$, $t_2 = \frac{7}{6} s$.

Να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Απάντηση

Παναγάς Γιάννης φυσικός

B₁ Να βρεθεί η εξίσωση της φάσης των υλικών σημείων σε συνάρτηση με τη θέση της θέσης ισορροπίας τους, στον άξονα x Όχι τη χρονική στιγμή $t_1=2s$. Να γίνει η αντίστοιχη γραφική παράσταση.

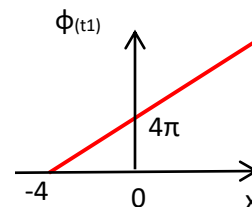
Απάντηση

$$\text{Γιά } t = t_1 = 2s. \quad \varphi_{(t_1)}(x) = 2\pi (2 + 0,5x)$$

$$\varphi_{(t_1)}(x) = 0 \Rightarrow 2 + 0,5x = 0 \Rightarrow x = -4m$$

Το υλικό σημείο στη θέση $x=-4m$ αρχίζει να εκτελεί ΑΑΤ, όπως το υλικό σημείο στη θέση $x=0$ τη χρονική στιγμή $t=0$.

$$\text{Γιά } x = 0, \quad \varphi_{(t_1)}(0) = 4\pi$$



B₂ Να βρεθούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης, των υλικών σημείων της χορδής σε συνάρτηση με τη θέση, της θέσης ισορροπίας τους στον άξονα x Όχι (στιγμιότυπο) τις χρονικές στιγμές $t_1=1,5s$, $t_2 = \frac{4}{3} s$.

Να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

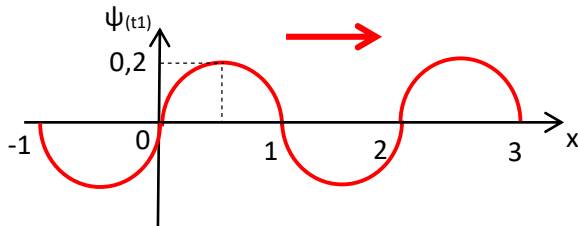
Απάντηση

$$\psi_{(t_1)}(x) = 0,2\eta\mu 2\pi(1,5 - 0,5x)$$

$$\text{Για } \varphi_{(t_1)}(x) = 0 \Rightarrow 1,5 - 0,5x = 0 \Rightarrow x = 3\text{m}$$

$$\text{Παίρνουμε το πηλίκο } \frac{x}{\lambda} = \frac{3}{2} = 1,5 \Rightarrow x = 1,5\lambda = 6 \frac{\lambda}{4}$$

και κόβουμε τα 3m σε έξι $\lambda/4$. Ξεκινάμε τη γραφική παράσταση από το τέλος ($x=3\text{m}$) όπου $\psi_{(t_1)}=0$ και παίρνουμε προς την αρχή ανά $\lambda/4$, max πάνω- μηδέν -min κάτω- μηδέν



$$\psi_{(t_2)}(x) = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{7}{6} - 0,5x\right)$$

$$\text{Για } \varphi_{(t_2)}(x) = 0 \Rightarrow \frac{7}{6} - 0,5x = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3} \text{ m}$$

$$\text{Παίρνουμε το πηλίκο } \frac{x}{\lambda} = \frac{7/3}{2} = \frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$x = \left(1 + \frac{1}{6}\right) \lambda = 4 \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{6} = 4 \frac{\lambda}{4} + 2 \frac{\lambda}{12}$$

Παίρνουμε από την αρχή $5 \frac{\lambda}{4}$ προς τα θετικά και το τελευταίο $\frac{\lambda}{4}$ το κόβουμε σε τρία ίσα μέρη με μήκος $\frac{1}{3} \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{12}$ το κάθε ένα. Από το δεύτερο κόψιμο $2 \frac{\lambda}{12}$ ξεκινάμε τη γραφική παράσταση προς την αρχή 0 ανά $\lambda/4$, max πάνω- μηδέν – min κάτω - μηδέν Για $x=0$ βρίσκουμε την τιμή της $\psi_{(t_2)}(0)$ πάνω στον άξονα $\psi_{(t_2)}$.

$$\psi_{(t_2)}(0) = 0,2\eta\mu 2\pi\frac{7}{6} = 0,2\eta\mu \left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\psi_{(t_2)}(0) = 0,2\eta\mu \frac{\pi}{3} = 0,1 \sqrt{3} \text{ m}$$

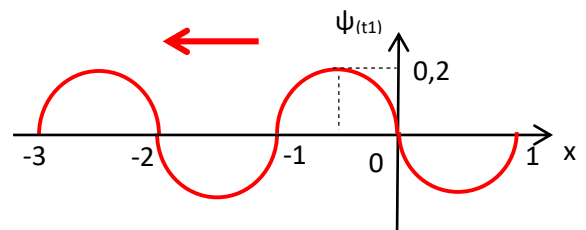
Παναγάς Γιάννης φυσικός

$$\psi_{(t_1)}(x) = 0,2\eta\mu 2\pi(1,5 + 0,5x)$$

$$\text{Για } \varphi_{(t_1)}(x) = 0 \Rightarrow 1,5 + 0,5x = 0 \Rightarrow x = -3\text{m}$$

$$\text{Παίρνουμε το πηλίκο } \frac{x}{\lambda} = \frac{3}{2} = 1,5 \Rightarrow x = 1,5\lambda = 6 \frac{\lambda}{4}$$

και κόβουμε τα 3m σε έξι $\lambda/4$. Ξεκινάμε τη γραφική παράσταση από το τέλος ($x = -3\text{m}$) όπου $\psi_{(t_1)}=0$ και παίρνουμε προς την αρχή ανά $\lambda/4$, max πάνω- μηδέν -min κάτω- μηδέν.....



$$\psi_{(t_2)}(x) = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{4}{3} + 0,5x\right)$$

$$\text{Για } \varphi_{(t_2)}(x) = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} + 0,5x = 0 \Rightarrow x = -\frac{8}{3} \text{ m}$$

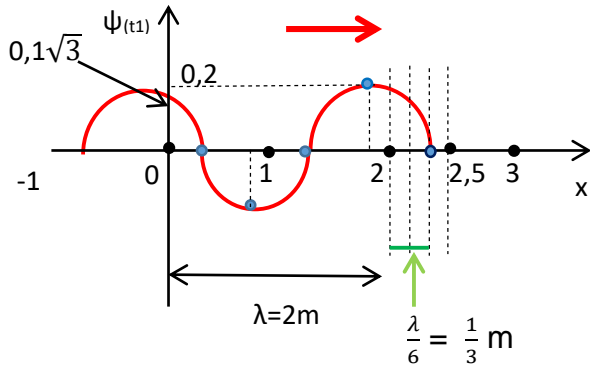
$$\text{Παίρνουμε το πηλίκο } \frac{|x|}{\lambda} = \frac{8/3}{2} = \frac{8}{6} = 1 + \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$|x| = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \lambda = 5 \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{12}$$

Παίρνουμε από την αρχή $6 \frac{\lambda}{4}$ προς τα αρνητικά και το τελευταίο $\frac{\lambda}{4}$ το κόβουμε σε τρία ίσα μέρη με μήκος $\frac{1}{3} \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{12}$ το κάθε ένα. Από το πρώτο κόψιμο $\frac{\lambda}{12}$ ξεκινάμε τη γραφική παράσταση προς την αρχή 0 ανά $\lambda/4$, max πάνω- μηδέν – min κάτω - μηδέν Για $x=0$ βρίσκουμε την τιμή της $\psi_{(t_2)}(0)$ πάνω στον άξονα $\psi_{(t_2)}$.

$$\psi_{(t_2)}(0) = 0,2\eta\mu 2\pi\frac{4}{3} = 0,2\eta\mu \left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\psi_{(t_2)}(0) = 0,2\eta\mu \frac{2\pi}{3} = 0,1 \sqrt{3} \text{ m}$$

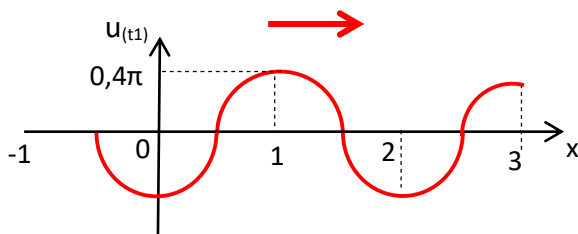


B₃ Να βρεθούν οι εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης των υλικών σημείων της χορδής σε συνάρτηση με τη θέση, της θέσης ισοροπίας τους στον άξονα $x'Ox$, τη χρονική στιγμή $t_1=1,5\text{s}$.

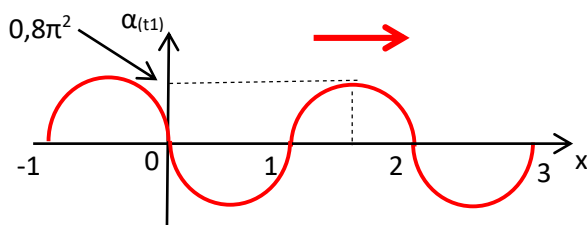
Να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Απάντηση

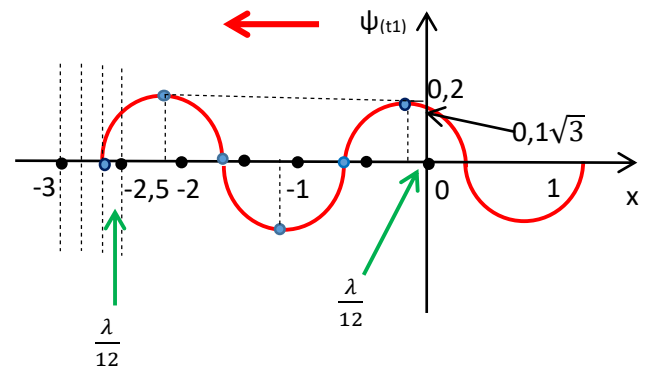
$$u_{(t_1)}(x) = 0,4\pi \sin 2\pi(1,5 - 0,5x)$$



$$a_{(t_1)}(x) = -0,8\pi^2 \eta\mu 2\pi(1,5 - 0,5x)$$



Παναγάς Γιάννης φυσικός

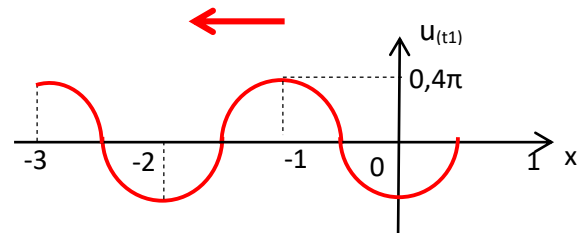


B₃ Να βρεθεί οι εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης των υλικών σημείων της χορδής σε συνάρτηση με τη θέση, της θέσης ισοροπίας τους στον άξονα $x'Ox$, τη χρονική στιγμή $t_1=1,5\text{s}$.

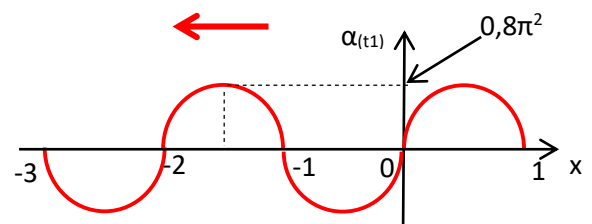
Να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Απάντηση

$$u_{(t_1)}(x) = 0,4\pi \sin 2\pi(1,5 + 0,5x)$$



$$a_{(t_1)}(x) = -0,8\pi^2 \eta\mu 2\pi(1,5 + 0,5x)$$



B₄ Τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,5s$ να βρεθούν η απομάκρυνση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του υλικού σημείου (1) του οποίου η θέση ισορροπίας είναι στη θέση $x_1 = \frac{11}{6} m$. Στη συνέχεια να βρεθούν τα μεγέθη x_2, ψ_2, u_2, a_2 του υλικού σημείου (2) του οποίου η θέση ισορροπίας είναι στη θέση x_2 . Η διαφορά φάσης των ΑΑΤ των υλικών σημείων (1),(2) είναι $\varphi_{(x_1)} - \varphi_{(x_2)} = -3\pi$.

Απάντηση

$$\begin{aligned} \text{Η φάση } \varphi_{(t_1)}(x_1) &= 2\pi(1,5 - 0,5x_1) = 2\pi(1,5 - 0,5 \frac{11}{6}) \\ &= 2\pi(1,5 - \frac{11}{12}) = 2\pi(\frac{18}{12} - \frac{11}{12}) = 2\pi \frac{7}{12} = \frac{7\pi}{6} = (\pi + \frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

$$\text{Η απομάκρυνση } \psi_{(t_1)}(x_1) = 0,2\eta\mu(\pi + \frac{\pi}{6}) = -0,1m$$

$$\text{Η ταχύτητα } u_{(t_1)}(x_1) = 0,4\pi\sigma\upsilon\nu(\pi + \frac{\pi}{6}) = -0,2\pi\sqrt{3} m/s$$

$$\text{Η επιτάχυνση } a_{(t_1)}(x_1) = -0,8\pi^2 \eta\mu(\pi + \frac{\pi}{6}) = 0,4\pi^2 m/s^2$$

Η συνέχεια.....

$$\varphi_{(x_1)} - \varphi_{(x_2)} = -3\pi \Rightarrow \varphi_{(x_2)} = \varphi_{(x_1)} + 3\pi = (3\pi + \frac{7\pi}{6}) \text{ rad}$$

$$\text{Άρα } \varphi_{(t_1)}(x_2) = 2\pi(1,5 - 0,5x_2) = (3\pi + \frac{7\pi}{6}) = 4\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$2\pi(1,5 - 0,5x_2) = (4\pi + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow -0,5x_2 = \frac{7}{6} \Rightarrow$$

$$x_2 = -\frac{7}{3} m$$

$$\text{Η απομάκρυνση } \psi_{(t_1)}(x_2) = 0,2\eta\mu(4\pi + \frac{\pi}{6}) = 0,1m$$

$$\text{Η ταχύτητα } u_{(t_1)}(x_2) = 0,4\pi\sigma\upsilon\nu(4\pi + \frac{\pi}{6}) = 0,2\pi\sqrt{3} m/s$$

$$\text{Η επιτάχυνση } a_{(t_1)}(x_2) = -0,8\pi^2 \eta\mu(4\pi + \frac{\pi}{6}) = -0,4\pi^2 m/s^2$$

B₄ Τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,5s$ να βρεθούν η απομάκρυνση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του υλικού σημείου (1) του οποίου η θέση ισορροπίας είναι στη θέση $x_1 = \frac{5}{3} m$. Στη συνέχεια να βρεθούν τα μεγέθη x_2, ψ_2, u_2, a_2 του υλικού σημείου (2) του οποίου η θέση ισορροπίας είναι στη θέση x_2 . Η διαφορά φάσης των ΑΑΤ των υλικών σημείων (1),(2) είναι $\varphi_{(x_1)} - \varphi_{(x_2)} = 2\pi$.

Απάντηση

$$\begin{aligned} \text{Η φάση } \varphi_{(t_1)}(x_1) &= 2\pi(1,5 + 0,5x_1) = 2\pi(1,5 + 0,5 \frac{5}{3}) \\ &= 2\pi(1,5 + \frac{5}{6}) = 2\pi(\frac{9}{6} + \frac{5}{6}) = 2\pi \frac{14}{6} = \frac{14\pi}{3} = (4\pi + \frac{2\pi}{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Η απομάκρυνση } \psi_{(t_1)}(x_1) &= 0,2\eta\mu(4\pi + \frac{2\pi}{3}) = 0,2\eta\mu\frac{2\pi}{3} \\ &= 0,1\sqrt{3} m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Η ταχύτητα } u_{(t_1)}(x_1) &= 0,4\pi\sigma\upsilon\nu(4\pi + \frac{2\pi}{3}) = 0,4\pi\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \\ &= -0,2\pi m/s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Η επιτάχυνση } a_{(t_1)}(x_1) &= -0,8\pi^2 \eta\mu(4\pi + \frac{2\pi}{3}) = \\ &= -0,8\pi^2 \eta\mu \frac{2\pi}{3} = -0,4\pi^2 \sqrt{3} m/s^2 \end{aligned}$$

Η συνέχεια.....

$$\begin{aligned} \varphi_{(x_1)} - \varphi_{(x_2)} = 2\pi \Rightarrow \varphi_{(x_2)} &= \varphi_{(x_1)} - 2\pi = (\frac{14\pi}{3} - 2\pi) = \\ &= \frac{8\pi}{3} = (2\pi + \frac{2\pi}{3}) \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \varphi_{(t_1)}(x_2) = 2\pi(1,5 + 0,5x_2) = (2\pi + \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow$$

$$2(1,5 + 0,5x_2) = (2 + \frac{2}{3}) \Rightarrow 0,5x_2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x_2 = -\frac{4}{3} m$$

$$\text{Η απομάκρυνση } \psi_{(t_1)}(x_2) = 0,2\eta\mu(2\pi + \frac{2\pi}{3}) = 0,1\sqrt{3} m$$

$$\text{Η ταχύτητα } u_{(t_1)}(x_2) = 0,4\pi\sigma\upsilon\nu(2\pi + \frac{2\pi}{3}) = -0,2\pi m/s$$

$$\text{Η επιτάχυνση } a_{(t_1)}(x_2) = -0,8\pi^2 \eta\mu(2\pi + \frac{2\pi}{3}) = -0,4\pi^2 \sqrt{3} m/s^2$$

B₅ Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2,5\text{s}$ να βρεθεί ο αριθμός των υλικών σημείων της χορδής τα οποία έχουν απομάκρυνση $\psi = 0,1\text{m}$, μεταξύ των θέσεων $x_1 = -15\text{m}$ και $x_2 = 4\text{m}$.

Στη συνέχεια να βρεθεί η διαφορά φάσης των ΑΑΤ, του 3^{ου} υλικού σημείου και του 12^{ου} υλικού σημείου στη σειρά, από $x_1 = -15\text{m}$ μέχρι $x_2 = 4\text{m}$

Απάντηση

$$\psi_{(t_1)}(x) = 0,2\eta\mu 2\pi(t_1 - 0,5x) \Rightarrow \psi_{(t_1)}(x) = 0,2\eta\mu 2\pi(2,5 - 0,5x) \\ \Rightarrow 0,1 = 0,2\eta\mu 2\pi(2,5 - 0,5x) \Rightarrow \eta\mu 2\pi(2,5 - 0,5x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$2\pi(2,5 - 0,5x) = \frac{\pi}{6} + 2\kappa_1\pi \Rightarrow$$

$$2,5 - 0,5x = \frac{1}{12} + \kappa_1 \Rightarrow$$

$$2,5 - \frac{1}{12} - \kappa_1 = 0,5x \Rightarrow$$

$$x = 5 - \frac{1}{6} - 2\kappa_1$$

Όμως $-15 < x < 4$

$$\text{Άρα } -15 < 5 - \frac{1}{6} - 2\kappa_1 < 4$$

$$\Rightarrow \frac{5}{12} < \kappa_1 < 10 - \frac{1}{12}$$

Επομένως $\kappa_1 = 1, \dots, 9$

(εννέα Υ.Σ.)

$$2\pi(2,5 - 0,5x) = \frac{5\pi}{6} + 2\kappa_2\pi$$

$$2,5 - 0,5x = \frac{5}{12} + \kappa_2 \Rightarrow$$

$$2,5 - \frac{5}{12} - \kappa_2 = 0,5x \Rightarrow$$

$$x = 5 - \frac{5}{6} - 2\kappa_2$$

Όμως $-15 < x < 4$

$$\text{Άρα } -15 < 5 - \frac{5}{6} - 2\kappa_2 < 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12} < \kappa_2 < 10 - \frac{5}{12}$$

Επομένως $\kappa_2 = 1, \dots, 9$

(εννέα Υ.Σ.)

Σύνολο 18 Υ.Σ.

Η συνέχεια.....

Βάζοντας τις τιμές των κ_1, κ_2 στις εξισώσεις των x , βρίσκουμε τις θέσεις κατά σειρά των υλικών σημείων.

$$\text{Για } \kappa_1 = 9, x = 5 - \frac{1}{6} - 2 \cdot 9 = -13 - \frac{1}{6} = -\frac{79}{6} \text{ m}$$

$$\text{Για } \kappa_2 = 9, x = 5 - \frac{5}{6} - 2 \cdot 9 = -13 - \frac{5}{6} = -\frac{83}{6} \text{ m} \quad (\text{το } 1^\circ)$$

Παναγής Γιάννης φυσικός

B₅ Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2,5\text{s}$ να βρεθεί ο αριθμός των υλικών σημείων της χορδής τα οποία έχουν απομάκρυνση $\psi = -0,1\text{m}$ και θετική ταχύτητα, μεταξύ των θέσεων $x_1 = -5\text{m}$ και $x_2 = 10\text{m}$. Στη συνέχεια να βρεθεί η διαφορά φάσης των ΑΑΤ, του 2^{ου} υλικού σημείου και του 4^{ου} υλικού σημείου στη σειρά, από $x_1 = -5\text{m}$ μέχρι $x_2 = 10\text{m}$

Απάντηση

$$\psi_{(t_1)}(x) = 0,2\eta\mu 2\pi(t_1 + 0,5x) \Rightarrow \psi_{(t_1)}(x) = 0,2\eta\mu 2\pi(2,5 + 0,5x) \\ \Rightarrow -0,1 = 0,2\eta\mu 2\pi(2,5 + 0,5x) \Rightarrow \eta\mu 2\pi(2,5 + 0,5x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$2\pi(2,5 + 0,5x) = \frac{7\pi}{6} + 2\kappa_1\pi$$

Όμως

$$u_{(t_1)}(x) = 0,4\pi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{6} + 2\kappa_1\pi\right)$$

$$\text{με } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{6} + 2\kappa_1\pi\right) < 0$$

απορρίπτεται

$$2\pi(2,5 + 0,5x) = \frac{11\pi}{6} + 2\kappa_2\pi$$

$$2,5 + 0,5x = \frac{11}{12} + \kappa_2 \Rightarrow$$

$$0,5x = \frac{11}{12} + \kappa_2 - 2,5 \Rightarrow$$

$$x = \frac{22}{12} + 2\kappa_2 - 5 = \frac{5}{6} + 2\kappa_2 - 4$$

Όμως $-5 < x < 10$

$$\text{Άρα } -5 < \frac{5}{6} + 2\kappa_2 - 4 < 10$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3} < \kappa_2 < 7 - \frac{5}{12}$$

Επομένως $\kappa_2 = 0, 1, \dots, 6$

(επτά Υ.Σ.)

Η συνέχεια.....

Βάζοντας τις τιμές του κ_2 στην εξίσωση της x βρίσκουμε τις θέσεις κατά σειρά των υλικών σημείων.

$$\text{Για } \kappa_2 = 0, x = \frac{5}{6} + 2\kappa_2 - 4 = \frac{5}{6} - 4 = -\frac{19}{6} \text{ m} \quad (\text{το } 1^\circ)$$

$$\text{Για } \kappa_2 = 1, x = \frac{5}{6} + 2 - 4 = \frac{5}{6} - 2 = -\frac{7}{6} \text{ m} \quad (\text{το } 2^\circ)$$

$$\text{Για } \kappa_1=8, x = 5 - \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 8 = -11 - \frac{1}{6} = -\frac{67}{6} \text{ m}$$

$$\text{Για } \kappa_2=8, x = 5 - \frac{5}{6} \cdot 2 \cdot 8 = -11 - \frac{5}{6} = -\frac{71}{6} \text{ m}$$

Με βάση τις τιμές των x , **το 2^ο** είναι για $\kappa_1=9$

$$\text{και } \text{το 3^ο είναι για } \kappa_2=8 \cdot x_{(\kappa_2=8)} = -\frac{71}{6} \text{ m}$$

Επειδή το 12^ο υλικό σημείο κατά σειρά έχει ζυγό αριθμό θα χρησιμοποιήσουμε το κ_1 . Για μείωση του κ_1 κατά ένα, αυξάνεται ο αριθμός της σειράς των υλικών σημείων κατά δύο θέσεις. Από τη δεύτερη μέχρι τη δωδέκατη θέση, η διαφορά είναι δέκα, άρα η μείωση του κ_1 από το 9 είναι 5. Επομένως η θέση του δωδέκατου υλικού σημείου κατά σειρά, είναι για $\kappa_1=4$

$$\text{Για } \kappa_1=4, x = 5 - \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 4 = -3 - \frac{1}{6} = -\frac{19}{6} \text{ m}$$

$$\text{Οπότε } \varphi_{(3)} - \varphi_{(12)} = 2\pi \frac{x_{(12)} - x_3}{\lambda} = \pi \left[-\frac{19}{6} - \left(-\frac{71}{6}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \varphi_{(3)} - \varphi_{(12)} = \frac{26}{3} \pi$$

$$\text{Για } \kappa_2=3, x = \frac{5}{6} + 6 - 4 = \frac{5}{6} + 2 = \frac{17}{6} \text{ m} \quad (\text{το 4^ο})$$

$$\text{Οπότε } \varphi_{(2)} - \varphi_{(4)} = 2\pi \frac{x_{(4)} - x_2}{\lambda} = \pi \left[\frac{17}{6} - \left(-\frac{7}{6}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \varphi_{(2)} - \varphi_{(4)} = \frac{24}{3} \pi$$