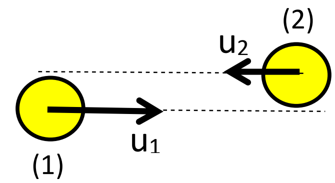
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ (3h) ΚΡΟΥΣΕΙΣ – ΣΤΕΡΕΟ- ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ 24-25

ΘΕΜΑ Α

A_1 (5 μ)

Οι σφαίρες (1), (2) με μάζες m,2m αντίστοιχα κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και οι ταχύτητες των κέντρων μάζας τους, είναι παράλληλες μεταξύ τους. Οι ορμές των σφαιρών μετά την κρούση είναι αντίθετες μεταξύ τους.



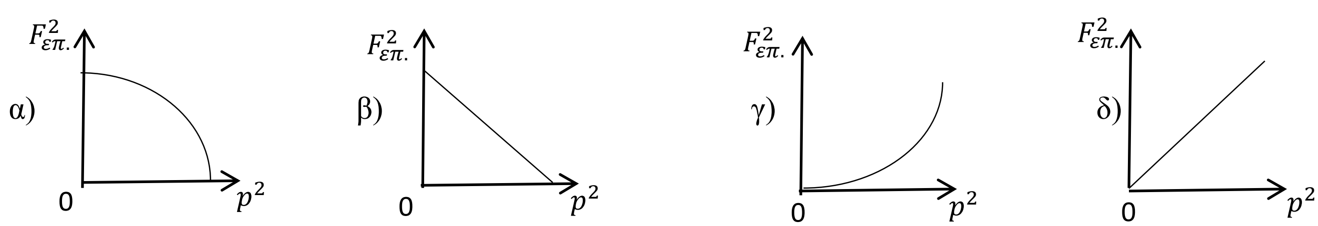
α) Οι σφαίρες μετά την κρούση τους κινούνται στη διεύθυνση που κινούνταν πριν την κρούση.

β) Οι ορμές των σφαιρών πριν την κρούση δεν είναι αντίθετες μεταξύ τους .

γ) Πριν την κρούση των σφαιρών ,το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας (1) είναι διπλάσιο του μέτρου της ταχύτητας της σφαίρα (2).

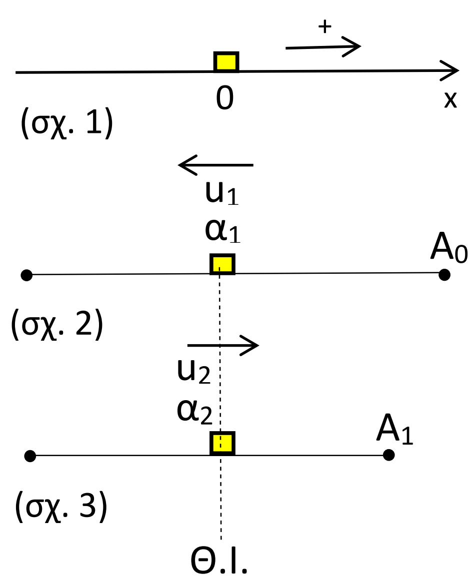
δ) Οι σφαίρες μετά την κρούση τους κινούνται σε διαφορετικές διευθύνσεις μεταξύ τους.

A_2. (5μ) Κινητό εκτελεί ΑΑΤ. Η γραφική παράσταση του τετραγώνου της δύναμης επαναφοράς η οποία του ασκείται $F_{επ.}^2$,σε συνάρτηση με το τετράγωνο της ορμής του p^2 , είναι



A_3 (5μ)

Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη επαναφοράς $F_{επ.}$=-D x. Το σώμα ισορροπεί στη θέση x=0 (σχ. 1) Μετατοπίζουμε το σώμα στο αρχικό πλάτος A_0 και το αφήνουμε. Το σώμα εκτελεί οριζόντια φθίνουσα ταλάντωση με δύναμη απόσβεσης $F_{απ.}$ = -b u. Κατά την κίνηση του σώματος από το πλάτος A_0 μέχρι το επόμενο πλάτος A_1 σε χρόνο Τ, το μέτρο της ταχύτητάς του και το μέτρο της επιτάχυνσής του, όταν διέρχεται από την θέση ισορροπίας του προς τα αριστερά, είναι u_1,$α_1$ (σχ. 2) και όταν διέρχεται από τη



θέση ισορροπίας του προς τα δεξιά είναι $u_2, α_2$ (σχήμα 3).

Δίνεται ότι η απόλυτη τιμή του ρυθμού μετατροπής της ενέργειας σε θερμική είναι $|\frac{dW_{F_{απ.}}}{dt}| = bu^2$

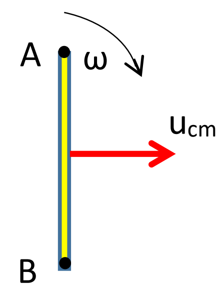
α) Η φορά της επιτάχυνσης όταν διέρχεται το σώμα από τη θέση ισορροπίας $α_1$ στο σχήμα 2 είναι προς τα αριστερά και η φορά της επιτάχυνσης $α_2$, στο σχήμα 3 είναι προς τα δεξιά.

β) Στο σχήμα 3 η ταχύτητα του σώματος γίνεται μέγιστη σε σημείο δεξιά από τη θέση ισορροπίας.

γ) Η απόλυτη τιμή του ρυθμού μετατροπής της ενέργειας σε θερμική στη θέση ισορροπίας στο σχήμα 2 είναι μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή του ρυθμού μετατροπής της ενέργειας σε θερμική ,στη θέση ισορροπίας στο σχήμα 3.

δ) Η σχέση μεταξύ των πλατών A_0, A_1 είναι $A_1 = A_0 e^{-2ΛT}$

A_4



Η ομογενής ράβδος ΑΒ εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική Ε.Ο.Κ και Ο.Σ.Κ.

Η σχέση μεταξύ των μέτρων u_{cm} – ω είναι $u_{cm} = ω \cdot AB$

Ποια από τις προτάσεις είναι λάθος.

α) Το μέτρο της ταχύτητας του άκρου Α της ράβδου , μετά από περιστροφή της κατά π/2 από την αρχική της θέση που φαίνεται στο σχήμα είναι $u_A = \sqrt{5}\, u_{cm}/2$

β) Το μέτρο της ταχύτητας του άκρου Α της ράβδου είναι $u_A = u_{cm}/2$, μετά από χρόνο $Δt = π/ω$, από τη στιγμή που είχε τη θέση που φαίνεται στο σχήμα.

γ) Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σημείου Α είναι $α_{κ.(A)} = u_{cm}^2/AB$

δ) Σε χρόνο Δt το μέτρο της μετατόπισης του κέντρου μάζας ισούται με το διπλάσιο του μήκους του τόξου, που διαγράφει το σημείο Α , κατά τη στροφική κίνηση της ράβδου.

A_5. (5μ)

Ποιες από τις προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

α) Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση όταν μειώνουμε τη συχνότητα του διεγέρτη από την τιμή $f_{δ1}$ στην οποία αντιστοιχεί πλάτος A_1 στη συχνότητα με τιμή $f_{δ2}$ στην οποία αντιστοιχεί πάλι πλάτος A_1, η συχνότητα $f_{δ1}$ είναι μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή.

β) Όταν συγκρούονται δύο σώματα και οι κινητικές τους ενέργειες μετατρέπονται σε θερμική ενέργεια , η κρούση τους είναι πλαστική.

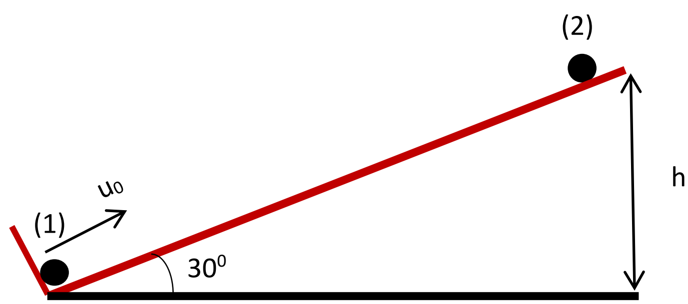
γ) Η κίνηση του στερεού κατά την οποία εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική κυκλική κίνηση και στροφική κίνηση, δεν είναι σύνθετη κίνηση.

δ) Η στροφορμή υλικού σημείου μάζας m, ταχύτητας μέτρου u, το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας R , έχει μέτρο $L= muR$, διεύθυνση τη διεύθυνση της ακτίνας του κύκλου και φορά προς το κέντρο του κύκλου.

ε) Αν σε μια ΚΕΚ μεταξύ δύο σφαιρών οι u_1, u_2 είναι οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων τους ελάχιστα πριν την κρούση και οι u'_1, u'_2 είναι οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων τους αμέσως μετά την κρούση, η σχέση μεταξύ τους είναι $u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$

ΘΕΜΑ Β

B_1 (8μ)



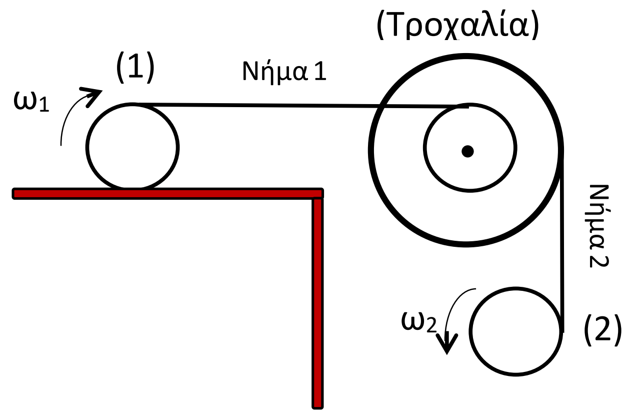
Στο κατώτερο σημείο του λείου πλάγιου επιπέδου κλίσης $\theta=30^0$ υπάρχει ελαστικό τοίχωμα, κάθετο στο πλάγιο επίπεδο. Τη στιγμή t=0 δίνουμε αρχική ταχύτητα u_0 στη μικρή σφαίρα (1) και ταυτόχρονα αφήνουμε μια ίδια σφαίρα (2) από ύψος h (σχήμα). Οι κρούσεις μεταξύ των σωμάτων είναι κεντρικές-ελαστικές και μεταξύ του τοιχώματος και του σώματος (1) είναι ελαστικές. Ισχύει $u_0^2 = 2gh$ όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Θεωρούμε τα σώματα χωρίς διαστάσεις.
Η χρονική στιγμή της πρώτης κρούσης μεταξύ των σφαιρών είναι $t_{πρώτης}$ και η χρονική στιγμή της δεύτερης κρούσης μεταξύ των σφαιρών είναι $t_{δεύτερης}$.

α) $t_{δεύτερης} - t_{πρώτης} = \frac{u0}{g}$ β) $t_{δεύτερης} - t_{πρώτης} = 2\frac{u0}{g}$ γ) $t_{δεύτερης} - t_{πρώτης} = 3\frac{u0}{g}$ (3μ)

Αιτιολόγηση (5μ)

ΠΑΝΑΝΑΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

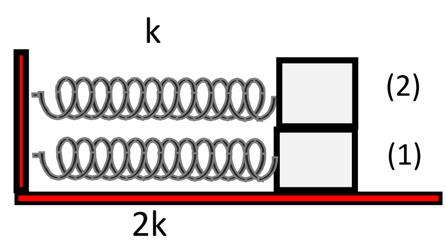
B_2 (8μ)



Ο λεπτός ομογενής κύλινδρος (1) κάνει κύλιση στο οριζόντιο επίπεδο. Ο κύλινδρος έχει ακτίνα R και το μη εκτατό νήμα 1 το οποίο είναι τυλιγμένο στην περιφέρειά του έχει οριζόντιο τμήμα το οποίο καταλήγει στο αυλάκι της τροχαλίας ακτίνας R στο οποίο είναι επίσης τυλιγμένο. Στο αυλάκι της τροχαλίας ακτίνας 2R είναι τυλιγμένο μη εκτατό νήμα 2 το κατακόρυφο τμήμα του οποίου καταλήγει στη περιφέρεια του κυλίνδρου (2) ακτίνας R ,στη οποία επίσης είναι τυλιγμένο. Τα νήματα είναι τεντωμένα και δεν ολισθαίνουν στις περιφέρειες των κυλίνδρων και στα αυλάκια της τροχαλίας . Η τροχαλία στρέφεται ,το νήμα 1 τυλίγεται στο αυλάκι της τροχαλίας και το νήμα 2 ξετυλίγεται από το αυλάκι της τροχαλίας και από περιφέρεια του κυλίνδρου (2). Ο κύλινδρος 2 κινείται κατακόρυφα. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου 1 είναι ω_1 ,του κυλίνδρου 2 είναι ω_2 και το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του κυλίνδρου 2, είναι $u_{cm.\,2}$. Η σχέση μεταξύ των $u_{cm\,2}$, ω_1 , ω_2 είναι

α) $u_{cm2} = (2\omega_1 + \omega_2)\,R$ β) $u_{cm2} = (4\omega_1 + \omega_2)\,R$ (3μ)
Αιτιολόγηση (5μ)

B_3



Τα σώματα (1),(2) στο σχήμα είναι ακίνητα με το σώμα (1) πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο και το σώμα (2) πάνω στο σώμα (1). Το σώμα (1) συνδέεται με το ένα άκρο του ιδανικού, οριζόντιου, ελατηρίου σταθεράς 2k και το σώμα (2) με το ένα άκρο του ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k .Τα άλλα άκρα των ελατηρίων συνδέονται σε σταθερά σημεία. Τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Οι μάζες των σωμάτων είναι $m_1 = m_2 = m$ Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των σωμάτων (1),(2) είναι μ.
Μετατοπίζουμε οριζόντια μαζί τα σώματα σε τόση απόσταση ώστε αν τα αφήσουμε ,να κινηθούν χωρίς να ολισθήσει το ένα ως προς το άλλο.

ΠΑΝΑΝΑΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

Α (4μ)

Να αποδειχθεί ότι τα σώματα θα εκτελέσουν ΑΑΤ και να βρεθεί η σταθερά ταλάντωσης D

Β(5m)

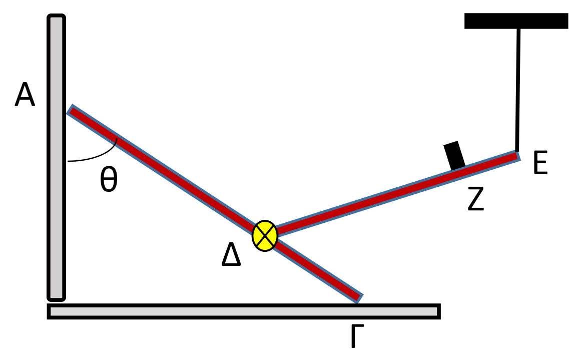
Το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης των σωμάτων, για να μην ολισθαίνει το ένα σώμα ως προς το άλλο είναι

α) $A_{max} = \mu mg/k$ β) $A_{max} = 2\mu mg/k$ γ) $A_{max} = 3\mu mg/k$ (2μ)

Αιτιολόγηση (3μ)

ΘΕΜΑ Γ

Η ομογενής δοκός ΑΓ μάζας M_1 =2Kg στο σχήμα ισορροπεί. Η δοκός είναι σε επαφή με τον λείο τοίχο στο Α και το δάπεδο στο Γ. Στο σημείο της Δ υπάρχει άρθρωση με την οποία συνδέεται το ένα άκρο της ομογενούς ράβδου ΔΕ μάζας M_2 =2Kg . Πάνω στη ράβδο στο σημείο Ζ, είναι ακίνητο το μικρό σώμα μάζας m=2Kg . Το άκρο Ε της ράβδου συνδέεται με το κάτω άκρο μη εκτατού , κατακόρυφου , νήματος του οποίου το άλλο άκρο συνδέεται με το ταβάνι. Η δοκός σχηματίζει γωνία θ με τον τοίχο.



Δίνονται ΓΔ= ΑΓ/3 , ΖΕ= ΔΕ/4 , $g=10m/s^2$, συνθ= 0,6 (ημθ=0,8) Θεωρούμε το μικρό σώμα χωρίς διαστάσεις.

Να βρείτε

α) Τη δύναμη που ασκεί η άρθρωση στη δοκό (10μ)

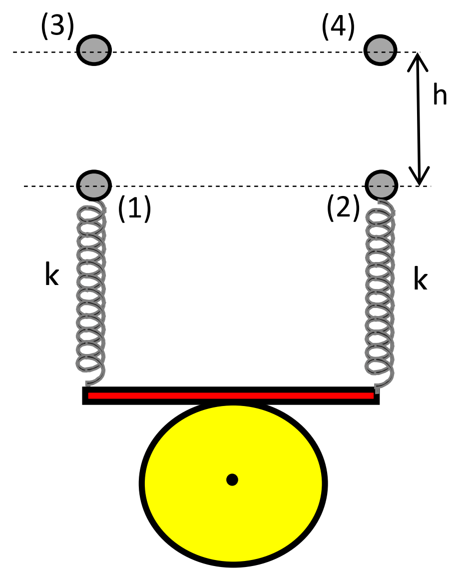
β) Τη δύναμη που ασκεί ο τοίχος στη δοκό (6μ)

γ) Τη στατική τριβή που ασκεί το δάπεδο στη δοκό. (3μ)

δ) Την ελάχιστη τιμή του συντελεστή τριβής μεταξύ δαπέδου-δοκού, για να ισορροπούν τα σώματα. (6μ)

ΠΑΝΑΝΑΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

ΘΕΜΑ Δ



Με τα άκρα της οριζόντιας ομογενούς σανίδας μάζας M=2Kg στο σχήμα , συνδέονται τα κάτω άκρα των ίδιων κατακόρυφων ιδανικών ελατηρίων με σταθερά k=100 N/m το κάθε ένα. Το μέσο της είναι σε επαφή με σημείο της περιφέρειας της τροχαλίας μάζας M=2Kg. Με τα πάνω άκρα των ελατηρίων συνδέονται τα ίδια σώματα (1) , (2) μάζας m=1Kg το κάθε ένα. Όλα τα σώματα είναι ακίνητα . Στις κατακόρυφες που διέρχονται από τα σώματα (1) , (2) και σε ύψος h , κρατάμε δύο ίδια σώματα (3) , (4) με μάζα m/3 το κάθε ένα. Θεωρούμε τα σώματα (1),(2),(3),(4) χωρίς διαστάσεις.

α) Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο άξονας στην τροχαλία. (5μ)

Αφήνουμε ταυτόχρονα τα σώματα (3) , (4). Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά με τα σώματα (1) , (2). Κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης των σωμάτων (1) , (2) η μέγιστη δύναμη που ασκεί ο άξονας στην τροχαλία έχει μέτρο $F_{(\text{αξ.->τροχ.})} = 100N$

Να βρεθούν

β) Τα πλάτη ταλάντωσης των ταλαντώσεων των σωμάτων (1) , (2) (6μ)

γ) Το ύψος h και τα ύψη που θα φτάσουν τα σώματα (3) , (4) μετά την κρούση τους . (6μ)

Κάνουμε το ίδιο πείραμα με τα σώματα (3) ,(4) να έχουν μάζα m το κάθε ένα και η κρούση τους με τα σώματα (1) , (2) να είναι πλαστική.

δ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη δύναμη που ασκεί ο άξονας στην τροχαλία. (8μ)

Κ. Ε.

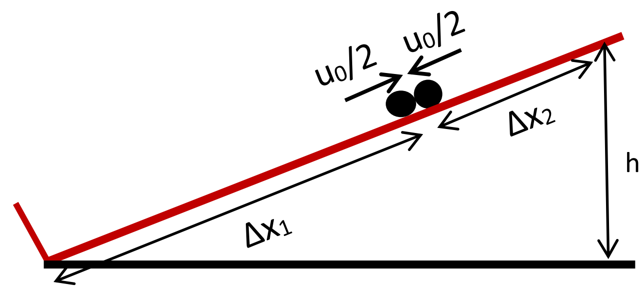
ΠΑΝΑΝΑΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1 γ A_2 β A_3 γ A_4 γ A_5 Λ , Σ, Λ, Λ, Σ.

ΘΕΜΑ Β



Η κίνηση του (1) είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη με επιτάχυνση μέτρου α=g/2 (Από το Β Νόμο) και η κίνηση του (2) είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με επιτάχυνση μέτρου α=g/2. Το άθροισμα των μέτρων των μετατοπίσεων των σφαιρών από t=0 μέχρι t=t_1 ($t_1=t_{πρώτης}$) είναι : $|\Delta\chi_1| + |\Delta\chi_2| = u_0 t_1 - \frac{1}{2}\frac{g}{2} t_1^2 + - \frac{1}{2}\frac{g}{2} t_1^2 = u_0 t_1$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα το μήκος $|\Delta\chi_1| + |\Delta\chi_2|$ και τη μία κάθετη πλευρά το μήκος h , από $ημ30^0 = h/(|\Delta\chi_1| + |\Delta\chi_2|) = 1/2$ =>

$|\Delta\chi_1| + |\Delta\chi_2| = 2h$ και από τη σχέση $u_0^2 = 2gh$ έχουμε $|\Delta\chi_1| + |\Delta\chi_2| = \frac{u_0^2}{g}$ Άρα $u_0 t_1 = \frac{u_0^2}{g}$ => $t_1 = \frac{u0}{g}$

Το μέτρο της ταχύτητας του (1) λίγο πριν την κρούση είναι $u_1 = u_0 - \frac{g}{2} t_1 = u_0 - \frac{g}{2}\frac{u0}{g} = u_0 - \frac{u0}{2} = \frac{u0}{2}$

Το μέτρο της ταχύτητας του (2) λίγο πριν την κρούση είναι $u_1 = \frac{g}{2} t_1 = \frac{g}{2}\frac{u0}{g} = \frac{u0}{2}$

Τα σώματα κατά την Κ.Ε.Κ. ανταλλάσσουν ταχύτητες . Αμέσως μετά την κρούση τα σώματα έχουν ταχύτητες ίσων μέτρων $\frac{u0}{2}$.

Στη συνέχεια το σώμα (1) με βάση την ΑΔΜΕ (πεδίο βαρυτ.) από τη t=0 μέχρι λίγο πριν φτάσει στο τοίχωμα , έχει ταχύτητα μέτρου u_0 λίγο πριν συγκρουστεί με το τοιχίο : $K_{αρχ.} = . K_{τελ.}$ => $\frac{1}{2} m u_0^2 = \frac{1}{2} m u_0'^2$ => $u_0' = u_0$

Ο χρόνος t_2 από τη στιγμή της κρούσης μεταξύ των σωμάτων μέχρι να φτάσει το (1) στο τοιχίο είναι

$u_0 = \frac{u0}{2} + \frac{g}{2} t_2$ => $t_2 = \frac{u0}{g}$ Δηλαδή $t_2 = t_1 = \frac{u0}{g}$

Το σώμα (2) με βάση την ΑΔΜΕ (πεδίο βαρυτ.) από τη t=0 μέχρι να φτάσει πάλι σε ύψος h, έχει ταχύτητα μηδέν: $K_{αρχ.} = . K_{τελ.}=0$

Ο χρόνος t_3 από τη στιγμή της κρούσης μεταξύ των σωμάτων μέχρι να φτάσει το (2) στο ύψος h είναι:

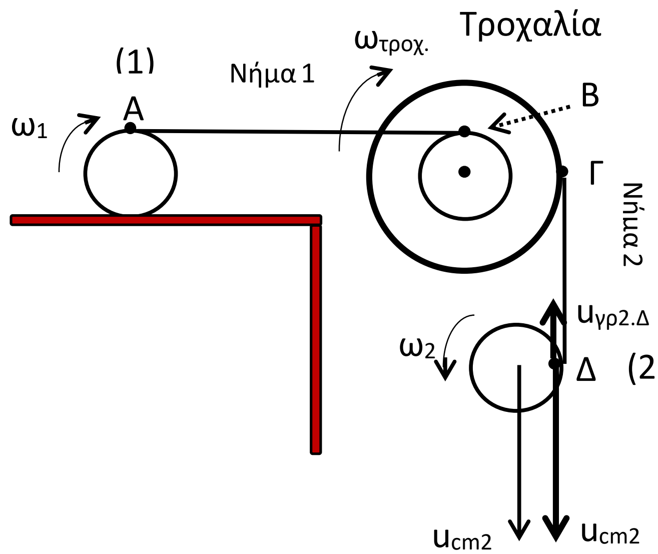
$0 = \frac{u0}{2} - \frac{g}{2} t_3$ => $t_3 = \frac{u0}{g}$ => Δηλαδή $t_3 = t_1 = \frac{u0}{g}$

ΠΑΝΑΝΑΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

Αμέσως μετά την ελαστική κρούση του (1) με το τοιχίο η σφαίρα έχει αρχική ταχύτητα u_0 και το (2) αρχίζει να κινείται οπότε επαναλαμβάνεται το ίδιο φαινόμενο , δηλαδή τα σώματα θα συγκρουστούν μεταξύ τους μετά από χρόνο $t_1 = \frac{u0}{g}$

Άρα ο χρόνος από την πρώτη κρούση μέχρι τη δεύτερη κρούση μεταξύ των σωμάτων είναι $2t_1 = 2\frac{u0}{g}$ Το β

B_2



Το μέτρο της ταχύτητας του Υ.Σ. του κυλίνδρου (1) στο σημείο Α είναι : $u_{(\text{ περιφ. κυλίν. 1) Α}} = 2u_{cm\ (\text{κυλίν..1})} = 2\omega_1 R$.

Επειδή το νήμα 1 δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του κυλίνδρου 1 : $u_{(\text{περιφ.κυλίν. 1) Α}} = u_{(\text{νήματος 1) Α}} = 2\omega_1 R$

Επειδή το νήμα 1 είναι τεντωμένο :

$u_{(\text{νήματος 1) Α}} = u_{(\text{νήματος 1) Β}} = 2\omega_1 R$

Επειδή το νήμα 1 δεν ολισθαίνει στο αυλάκι ακτίνας R της τροχαλίας : $u_{(\text{νήματος 1) Β}} = u_{(\text{αυλάκι –R τροχ.) Β}} = 2\omega_1 R$

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του Υ.Σ της τροχαλίας στο Γ είναι $u_{(\text{αυλάκι –2R τροχ.) Γ}} = \omega_{\text{τροχ}}\, 2R$

όμως $u_{(\text{αυλάκι –R τροχ.) Β}} = \omega_{\text{τροχ}}\, R$. Άρα $u_{(\text{αυλάκι –2R τροχ.) Γ}} = 2\, u_{(\text{αυλάκι –R τροχ.) Β}} = 4\, \omega_1 R$

Επειδή το νήμα 2 δεν ολισθαίνει στο αυλάκι ακτίνας 2R : $u_{(\text{νήματος 2) Γ}} = u_{(\text{αυλάκι –2R τροχ.) Γ}} = 4\, \omega_1 R$

Επειδή το νήμα 2 είναι τεντωμένο : $u_{(\text{νήματος 2) Γ}} = u_{(\text{νήματος 2) Δ}} = 4\, \omega_1 R$

Επειδή το νήμα 2 δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του κυλίνδρου 2 : $u_{(\text{νήματος 2) Δ}} = u_{(\text{περιφ. κυλίν. 2) Δ}} = 4\omega_1 R$

Όμως $u_{(\text{περιφ. κυλίν. 2) Δ}} = u_{cm2} - u_{\text{γραμμική(περιφ. τροχ. 2) Δ}}$ => $u_{(\text{περιφ. κυλίν. 2). Δ}} = u_{cm2} - \omega_2 R$

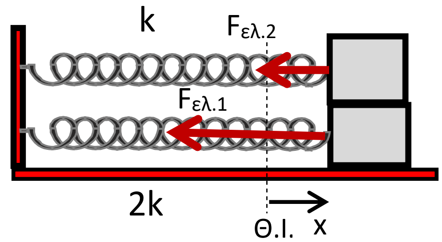
Επομένως $4\omega_1 R = u_{cm2} - \omega_2 R$ => $u_{cm2} = (4\omega_1 + \omega_2)R$ Το β

B_3

ΠΑΝΑΝΑΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

A.

Στο σχήμα , στην τυχαία θέση x με θετική φορά προς τα δεξιά , στο σώμα (2) ασκείται η $F_{ελ.2}$ και στο σώμα (1) η $F_{ελ.1}$. Η συνισταμένη δύναμη στο σύστημα είναι :

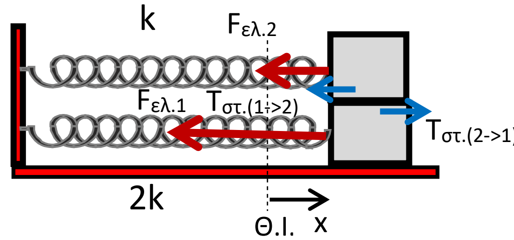


$ΣF = - F_{ελ.1} - F_{ελ.2} = - (k + 2k) x = - 3kx$

Άρα το σύστημα εκτελεί ΑΑΤ με D= 3k

B.

Στο σχήμα , στην τυχαία θέση x το μέτρο της $F_{ελ.1} = 2kx$ είναι διπλάσιο του μέτρου της $F_{ελ.2} = kx$. Άρα $mα_1 = 2mα_2$ =>



$α_1 = 2α_2$ => $\frac{Δu_1}{Δt} = 2\,\frac{Δu_2}{Δt}$ => $Δu_1 = 2\,Δu_2$

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι το κάτω σώμα τείνει να κινηθεί ως προς το πάνω σώμα, προς τα αριστερά. Άρα στο κάτω σώμα από το πάνω σώμα ασκείται στατική τριβή προς τα δεξιά $T_{στ.(2->1)}$. Λόγω δράσης – αντίδρασης στο πάνω σώμα από το κάτω σώμα ασκείται στατική τριβή προς τα αριστερά $T_{στ.(1->2)}$.

Στο σώμα (2) $ΣF = m_2\, α$ => $T_{στ.(1->2)} - F_{ελ.2} = m\,(- ω^2 x)$ όμως για το σύστημα $ω^2 = \frac{D}{2m} = \frac{3k}{2m}$ άρα

$T_{στ.(1->2)} - kx = - m\,\frac{3k}{2m}\,x$ => $T_{στ.(1->2)} = kx - \frac{3k}{2}\,x$ => $T_{στ.(1->2)} = - \frac{k}{2}\,x$

Η μέγιστη στατική τριβή είναι $T_{στ.(1->2)\,max} = - \frac{k}{2}\,x_{max}$ όμως $T_{στ.(1->2)\,max} = μmg$ άρα $μmg = - \frac{k}{2}\,x_{max}$

$x_{max} = - \frac{2μmg}{k}$. Επομένως $A_{max} = |\,x_{max}\,| = |\,- \frac{2μmg}{k}\,|$ => $A_{max} = \frac{2μmg}{k}$ Το β

ΘΕΜΑ Γ

α)

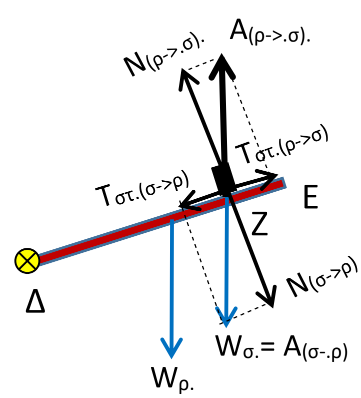
Στο σώμα ασκείται η δύναμη του βάρους του $W_{σ.}$, η κάθετη αντίδραση από τη ράβδο $N_{(ρ.->σ.)}$ και η στατική τριβή από τη ράβδο στο σώμα $T_{στ.(ρ.->σ.)}$. Σχήμα 1.

Η δύναμη που ασκεί το σώμα στη ράβδο ισούται με το βάρος του σώματος.

Απόδειξη

1ος τρόπος

Λόγω της ισορροπίας του σώματος η συνισταμένη των δυνάμεων

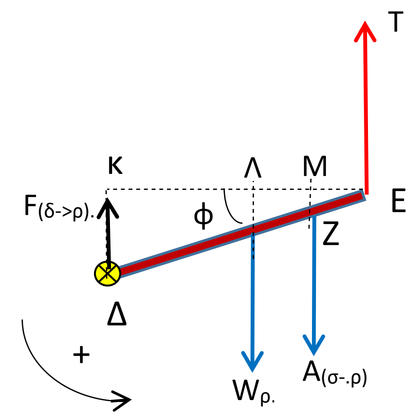


Σχήμα 1

$N_{(ρ.->σ.)}$, $T_{στ.(ρ.->σ.)}$. η $A_{(ρ.->σ.)}$ είναι αντίθετη του βάρους $W_{σ.}$. Λόγω δράσης – αντίδρασης η $A_{(σ.->ρ.)}$ είναι αντίθετη της $A_{(ρ.->σ.)}$, δηλαδή $\vec{A}_{σ\rightarrow ρ} = \vec{W}_σ$

2ος τρόπος

Λόγω της ισορροπίας του σώματος η συνισταμένη των δυνάμεων $N_{(ρ.->σ.)}$, $T_{στ.(ρ.->σ.)}$. η $A_{(ρ.->σ.)}$ είναι αντίθετη του βάρους $W_{σ.}$. Λόγω δράσης – αντίδρασης η $N_{(σ.->ρ.)}$ είναι αντίθετη $N_{(ρ.->σ.)}$ και η $T_{στ.(σ.->ρ.)}$. είναι αντίθετη της $T_{στ.(ρ.->σ.)}$. Η συνισταμένη των $N_{(σ.->ρ.)}$, $T_{στ.(σ.->ρ.)}$ είναι η $\vec{A}_{σ\rightarrow ρ}$ η οποία ταυτίζεται με το βάρος του σώματος $\vec{A}_{σ\rightarrow ρ} = \vec{W}_σ$



Σχήμα 2

Στο σχήμα 2 στη ράβδο ασκείται η δύναμη του βάρους της $W_ρ=20N$ κατακόρυφα προς τα κάτω , η τάση του νήματος T κατακόρυφα προς τα πάνω , η δύναμη $\vec{A}_{σ\rightarrow ρ}$ κατακόρυφα προς τα κάτω με $A_{(σ.->ρ.)} = W_σ=20N$ και η δύναμη $F_{(αρθ.->ρ)}$ από τη δοκό στη ράβδο η οποία λόγω της ισορροπίας της ράβδου από τη σχέση $ΣF_{οριζόντια} =0$ δεν έχει οριζόντια συνιστώσα , οπότε είναι κατακόρυφη .

Από τη σχέση $Στ_{(E)} =0$ η φορά της $F_{(αρθ.->ρ)}$ είναι προς τα πάνω.

Για να βρούμε την $F_{(αρθ.->ρ)}$ εφαρμόζουμε μόνο την $Στ_{(E)} =0$

$Στ_{(E)} =0 \Rightarrow W_ρ \cdot ΕΛ + A_{(σ.->ρ.)} \cdot ΕΜ - F_{(αρθ.->ρ)} \cdot ΕΚ =0 \Rightarrow$

$20 \cdot ΔΕ\ συνφ /2 + 20 \cdot ΔΕ\ συνφ /4 = F_{(αρθ.->ρ)} \cdot ΔΕ\ συνφ \Rightarrow$

$F_{(αρθ.->ρ)} = 10 +5 = 15\ N$

Επομένως η δύναμη από την άρθρωση στη δοκό λόγω Δ-Α μεταξύ άρθρωσης και ράβδου , ισορροπίας άρθρωσης και Δ-Α μεταξύ άρθρωσης και δοκού , έχει μέτρο $F_{(αρθ.->δ)} = 15\ N$ με φορά προς τα κάτω.

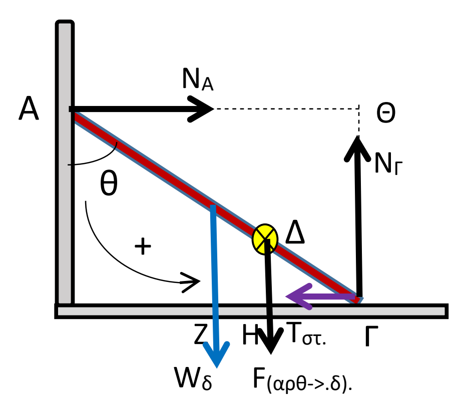
β)

Στη δοκό ασκούνται η δύναμη του βάρους της $W_δ=20N$, η κάθετη δύναμη από τον τοίχο N_A , η δύναμη από την άρθρωση $F_{(αρθ.->δ)} = 15\ N$, η κάθετη αντίδραση από το δάπεδο $N_Γ$ και η στατική τριβή από το δάπεδο προς τα αριστερά.

Για να βρούμε τη N_A εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας :

$Στ_{(Γ)} =0 \Rightarrow W_δ \cdot ΓΖ + F_{(αρθ.->δ.)} \cdot ΓΗ - N_A \cdot ΓΘ =0 \Rightarrow$

$20 \cdot ΑΓ\ ημθ/2 + 15 \cdot ΑΓημθ/3 = N_A \cdot ΑΓ\ συνθ \Rightarrow$



Σχήμα 3

$10 \cdot ημθ + 5 \cdot ημθ \;=\; N_A \cdot συνθ \;=>\; 15 \cdot ημθ = \; N_A \cdot συνθ \;=>$

$N_A \cdot 0{,}6 = 15 \cdot 0{,}8 => N_A = 20N$

γ)

Για να βρούμε την $T_{στ}$, εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας στη δοκό $ΣF_{οριζόντια} = 0 \;=> N_A – T_{στ.}= 0$ $=> T_{στ.}= N_A = 20N$

δ)

Για να βρούμε τη $N_Γ$ εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας στη δοκό $ΣF_{κατακόρυφα} = 0 \;=>$

$N_Γ - W_δ - F_{(αρθ.->δ.)} = 0 \;=>\; N_Γ = W_δ + F_{(αρθ.->δ.)} => N_Γ = 35\ N$

Η ελάχιστη τιμή του συντελεστή τριβής είναι $μ_{ελ.} = \frac{T_{στ.}}{N_Γ} \;=>\; μ_{ελ.} = \frac{20}{35}$

ΘΕΜΑ Δ

α)

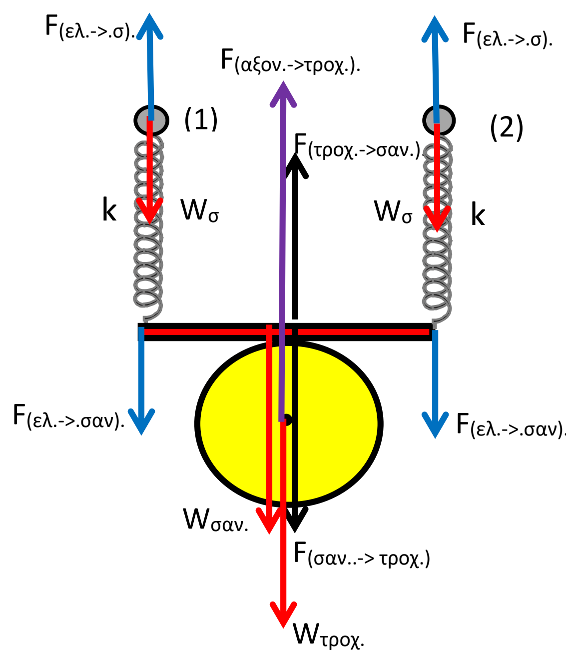
Λόγω της ισορροπίας των σωμάτων (1), (2) το μέτρο της δύναμης των ελατηρίων στα σώματα είναι $F_{(ελ.->σ)}$ είναι $F_{(ελ.->σ)} = W_σ =10N$.

Επειδή τα ελατήρια είναι ιδανικά $m_{ελ.} = 0$, από τη $ΣF_{ελ.} = 0$ και Δ-Α, ισχύει $F_{(ελ.->σ)} = F_{(ελ.->σαν.)} =10N$.

Στη σανίδα ασκούνται οι δυνάμεις από τα ελατήρια μέτρου $F_{(ελ.->σαν.)} =10N$ η κάθε μία προς τα κάτω, το βάρος της μέτρου $W_{σαν.} =20N$ και η δύναμη από την τροχαλία μέτρου $F_{(τροχ..->σαν.)}$

Εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας $ΣF_{σαν.\ (\ κατακόρυφα)} = 0 \;=>$

$F_{(τροχ..->σαν.)} - 2\ F_{(ελ.->σαν.)} - W_{σαν.}= 0 \;=>\; F_{(τροχ..->σαν.)} = 20+20= 40N$



Σχήμα 1

Στην τροχαλία ασκούνται οι δυνάμεις η $F_{(σαν..->τροχ..)} = 40\ N$ προς τα κάτω λόγω Δ-Α, το βάρος της $W_{τροχ.} = 20N$ και η δύναμη από τον άξονα στην τροχαλία μέτρου $F_{(αξονα\ ..->τροχ.)}$ κατακόρυφα προς τα πάνω.

Εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας $ΣF_{τροχ.\ (\ κατακόρυφα)} = 0 \;=>\; F_{(αξονα\ ..->τροχ.)} - W_{τροχ.} - F_{(σαν..->τροχ.)} = 0$

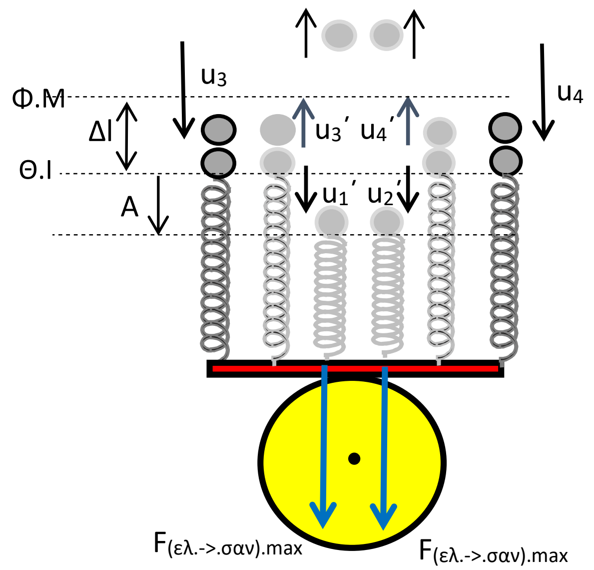
$=> \; F_{(αξονα\ ..->τροχ.)} = W_{τροχ.} + F_{(σαω..->τροχ.)} = 20+40 = 60N$

ΠΑΝΑΝΑΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

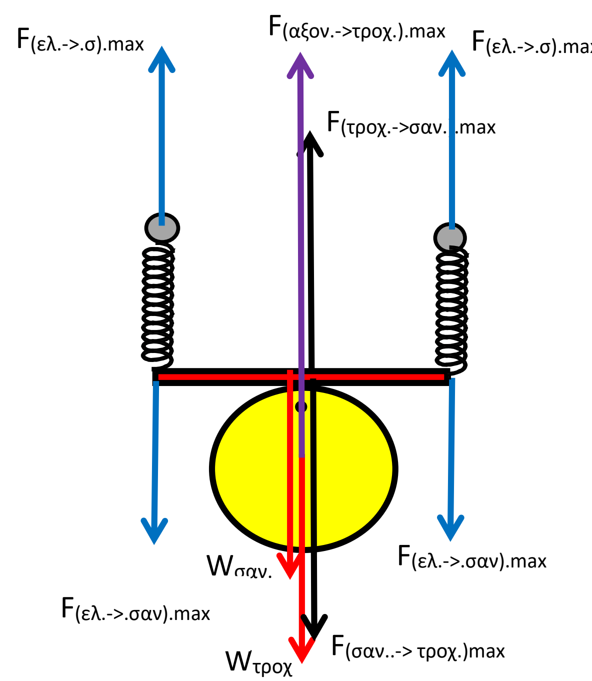
β)

Τα σώματα (3) , (4) φθάνουν ταυτόχρονα στα σώματα (1), (2) αντίστοιχα με τις ίσες ταχύτητες $u_3 = u_4$. Επειδή $m_1 = m_2$ και $m_3 = m_4$,οι κρούσεις ΚΕΚ είναι ίδιες οπότε και οι ταχύτητες αμέσως μετά την κρούση είναι $u_1΄= u_2΄$ και $u_3΄= u_4΄$. Σχήμα 2

Στη συνέχεια οι σφαίρες αριστερά και δεξιά έχουν κάθε στιγμή ίσες ταχύτητες και τους ασκούνται αντίστοιχα ίσες δυνάμεις. Τα σώματα (1),(2) εκτελούν ίδιες ταλαντώσεις και στα άκρα της σανίδας ασκούνται από τα ελατήρια ίσες δυνάμεις κάθε . χρονική στιγμή. Επομένως η συνισταμένη ροπή ως προς το μέσο της σανίδας είναι μηδέν. Η σανίδα παραμένει οριζόντια. Η μέγιστες δυνάμεις από τα ελατήρια στα άκρα της σανίδας ασκούνται όταν τα ταλαντευόμενα σώματα αποκτούν τα πλάτη τους για πρώτη φορά. Τότε ασκείται η μέγιστη δύναμη από τον άξονα στην τροχαλία. Σχήμα 3



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας $\Sigma F_{τροχ.\,(\,κατακόρυφα)} = 0$

$=> F_{(αξονα\,..->τροχ.)max} - W_{τροχ.} - F_{(σαν..->τροχ.)max} = 0 \quad =>$

$=> 100 – 20 - F_{(σαν..->τροχ.)max} = 0 => F_{(σαν..->τροχ.)max} = 80N$

Εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας $\Sigma F_{σαν.\,(\,κατακόρυφα)} = 0$

$=> F_{(τροχ..->σαν.)mzx} - 2\,F_{(ελ.->σαν.)max} - W_{σαν.} = 0 \quad =>$

$80 – 20 = 2\,F_{(ελ.->σαν.)max} \quad => \quad F_{(ελ.->σαν.)max} = 30N$ (1)

Το μέτρο της $F_{(ελ.->σαν.)max} = k\,(\,\Delta l + A)$ και λόγω της (1)

$30 = 100\,(\,\Delta l + A) \quad => \quad \Delta l + A = 0,3m$ (2)

Από το Σχήμα 1 λόγω της ισορροπίας των σωμάτων (1), (2) ισχύει $\Sigma F_{(1)} = \Sigma F_{(2)} = 0 \quad => \quad F_{ελ.->σ} – W_1 = 0. \quad =>$

$k\ \Delta l = W_1 => 100\,\Delta l = 10 \quad => \quad \Delta l = 0,1m$

Από τη σχέση (2) $0,1 + A = 0,3 => A=0,2m$

ΠΑΝΑΝΑΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

γ) Αμέσως μετά τις ΚΕΚ τα σώματα (1), (2) έχουν τις μέγιστες τιμές των ταχυτήτων τους ,γιατί βρίσκονται στις θέσεις ισορροπίας για τις ΑΑΤ τους. Σχήμα 2

$u_1' = u_2' = u_{max} = \omega A$ => $u_{max} = \omega A$ => $u_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,A$ => $u_{max} = \sqrt{\frac{100}{1}} \cdot 0{,}2$ => $u_{max} = 12 \cdot 0{,}2 = 2m/s$

Από τις ΚΕΚ $u_1' = \frac{2\frac{m}{3}}{m+\frac{m}{3}} u_3$ και $u_2' = \frac{2\frac{m}{3}}{m+\frac{m}{3}} u_4$ => $u_1' = u_3/2$ και $u_2' = u_4/2$ => $u_3 = u_4 = 2\,u_1' = 4m/s$

και $u_3' = \frac{\frac{m}{3}-m}{m+\frac{m}{3}} u_3$ και $u_4' = \frac{\frac{m}{3}-m}{m+\frac{m}{3}} u_4$ => $u_3' = -\,u_3/2$ και $u_4' = -\,u_4/2$ => $u_3' = u_4' = -2$ m/s

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ$_{\text{πεδ. βαρυτ.}}$ για τα σώματα (3), (4) από τη στιγμή τα αφήνουμε από ύψος h , μέχρι τη στιγμή λίγο πριν την κρούση τους. $m_3gh = \frac{1}{2} m_3 u_3^2$ και $m_4gh = \frac{1}{2} m_4u_4^2$ => $2gh = 16$ => $10h = 8$ => $h=0{,}8m$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ$_{\text{πεδ. βαρυτ.}}$ για τα σώματα (3), (4) από τη στιγμή λίγο μετά την κρούση τους, μέχρι να φτάσουν στο ύψος h΄. $m_3gh' = \frac{1}{2} m_3 u_3'^2$ και $m_4gh' = \frac{1}{2} m_4u_4'^2$ => $2gh' = 4$ => $10h' = 2$ => $h'=0{,}2m$

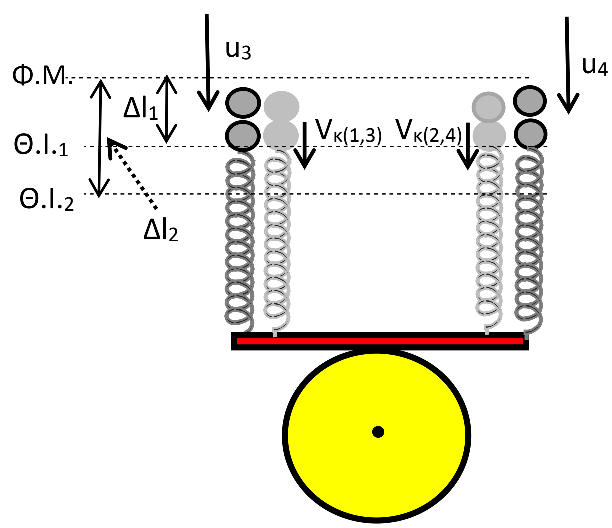
δ)

Τα μέτρα των κοινών ταχυτήτων των σωμάτων (1)-(3) και (2)-(4) βρίσκονται από την ΑΔΟ : $mu_3=2mV_{\kappa.(1,3)}$ και $mu_4 = 2mV_{\kappa(2,4)}$ => $V_{\kappa.(1,3)} = V_{\kappa(2,4)} = 2m/s$

Οι Θ.Ι.$_1$ των σωμάτων (1),(2) πριν τις πλαστικές κρούσεις είναι : ΣF=0 => $k\Delta l_1 = mg$ => $\Delta l_1 = 0{,}1m$

Οι Θ.Ι.$_2$ των σωμάτων (1),(2) μετά τις πλαστικές κρούσεις είναι : ΣF=0 => $k\Delta l_2 = 2mg$ => $\Delta l_2 = 0{,}2m$

Για να βρούμε το πλάτος Α εφαρμόζουμε την ΑΔΕ$_{\text{ταλ.}}$ από τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη μία ακραία θέση είτε του συσσωματώματος (1) - (3) είτε του συσσωματώματος (2)-(4).



Σχήμα 4

$\frac{1}{2}\, 2mV_{(1,3)}^2 + \frac{1}{2} k\,(\Delta l_2 - \Delta l_1)^2 = \frac{1}{2} k\,A^2$ =>

$2mV_{(1,3)}^2 + k\,(\Delta l_2 - \Delta l_1)^2 = k\,A^2$ => $8 + 100 \cdot 0{,}1^2 = 100\,A^2$ => $100\,A^2 = 9$ => $A = 0{,}3m$

Με τη μέγιστη συσπείρωση των ελατηρίων κατά τη διάρκεια των ΑΑΤ $\Delta l_{mzx(\text{συσπ.})} = \Delta l_2 + A = 0{,}5m$, το μέτρο των μέγιστων δυνάμεων των ελατηρίων στα άκρα της σανίδας προς τα κάτω είναι

$F_{(ελ.->σαν.)max} = k\ \Delta l_{mzx(συσπ.)}$ =100 · 0,5 =50N , η μέγιστη δύναμη της σανίδας στην τροχαλία είναι $F_{(σαν..->τροχ.)max} = 2\ F_{(ελ.->σαν.)max} + W_{σαν.}$= 100 +20=120N και η μέγιστη δύναμη του άξονα στην τροχαλία είναι $F_{(αξονα\ ..->τροχ.)max} = W_{τροχ.} + F_{(σαν..->τροχ.)max}$ = 20 + 120 = 140 N

Με τη μέγιστη επιμήκυνση των ελατηρίων κατά τη διάρκεια των ΑΑΤ $\Delta l_{mzx(επιμ.)} = A - \Delta l_2$ =0,1m το μέτρο των μέγιστων δυνάμεων των ελατηρίων στα άκρα της σανίδας προς τα πάνω είναι $F_{(ελ.->σαν.)max-πάνω} = k\ \Delta l_{mzx(επιμ.)}$ = 100 · 0,1 =10N , η ελάχιστη δύναμη της σανίδας στην τροχαλία είναι $F_{(σαν..->τροχ.)min} = 2\ F_{(ελ.->σαν.)max-πάνω} - W_{σαν.}$= 20 -20= 0 και η ελάχιστη δύναμη του άξονα στην τροχαλία είναι $F_{(αξονα\ ..->τροχ.)min} = W_{τροχ.} + F_{(σαν..->τροχ.)max-πάνω}$ = 20 +0=20 N

pananasgiannis@yahoo.gr